

1

(1)

$0 < a < b$ であるとき

$$\begin{aligned} -1 &< -\frac{a}{b} < 0 \\ \Leftrightarrow -1 &< \left(-\frac{a}{b}\right)^n < 1 \end{aligned}$$

となり、 $0 < c < 1$ であるとき

$$\begin{aligned} -c &< -c \cdot \left(-\frac{a}{b}\right)^n < c \\ \Leftrightarrow (0 <) 1 - c &< 1 - c \cdot \left(-\frac{a}{b}\right)^n < 1 + c \\ \Leftrightarrow (0 <) (1 - c)^{\frac{1}{n}} &< \left\{1 - c \cdot \left(-\frac{a}{b}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} < (1 + c)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

である。さらに、 $1 - c > 0, 1 + c > 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - c)^{\frac{1}{n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + c)^{\frac{1}{n}} = 1$$

となり、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{1 - c \cdot \left(-\frac{a}{b}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} = 1$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{b^n - c \cdot (-a)^n\right\}^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} b \cdot \left\{1 - c \cdot \left(-\frac{a}{b}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= b \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{b^n - c \cdot (-a)^n\right\}^{\frac{1}{n}} = b$$

(2)

(a)

1 枚の硬貨を 2 回続けて投げるとき、「2 回連続で裏が出る」ことがない事象は、2 回連続で裏

が出る事象の余事象であるから、その確率 P_2 は

$$P_2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}$$

である。1 枚の硬貨を 3 回続けて投げるとき、「2 回連続で裏が出る」ことがないのは

[1] 2 回目に表が出るとき

[2] 2 回目に裏が出る、かつ、1, 3 回目に表が出るとき

のいずれかである。

[1] 2 回目に表が出るとき

このようになる確率は $\frac{1}{2}$ である。

[2] 2 回目に裏が出る、かつ、1, 3 回目に表が出るとき

このようになる確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

である。

以上、[1], [2] の場合は互いに排反であるから、1 枚の硬貨を 3 回続けて投げるとき、「2 回連続

で裏が出る」ことがない確率 P_3 は

$$P_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{5}{8}$$

である。

$$(\text{答}) P_2 = \frac{3}{4}, P_3 = \frac{5}{8}$$

$$(s, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

である。

$$(\text{答}) (s, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

(c)

α, β が $\alpha + \beta = s, \alpha\beta = -t$ をみたすとき、(b) の結果を用いて

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= (\alpha + \beta)P_{n+1} - \alpha\beta P_n \\ \Leftrightarrow \begin{cases} P_{n+2} - \alpha P_{n+1} = \beta(P_{n+1} - \alpha P_n) \\ P_{n+2} - \beta P_{n+1} = \alpha(P_{n+1} - \beta P_n) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} P_{n+1} - \alpha P_n = \beta^{n-1}(P_2 - \alpha P_1) \\ P_{n+1} - \beta P_n = \alpha^{n-1}(P_2 - \beta P_1) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。(a) の結果を用いて

$$\begin{cases} P_{n+1} - \alpha P_n = \beta^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \alpha \cdot 1\right) \\ P_{n+1} - \beta P_n = \alpha^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \beta \cdot 1\right) \end{cases}$$

となるから

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)P_n &= \beta^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \alpha \cdot 1\right) - \alpha^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \beta \cdot 1\right) \\ \Leftrightarrow P_n &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left\{ \beta^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \alpha\right) - \alpha^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \beta\right) \right\} \quad (\because \alpha < \beta) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) P_n = \frac{1}{\beta - \alpha} \left\{ \beta^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \alpha\right) - \alpha^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \beta\right) \right\}$$

(d)

(b) の結果を用いて

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \alpha\beta = -\frac{1}{4}$$

となるから、解と係数の関係より α, β は x に関する 2 次方程式

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

の 2 解となる。

$$(s, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

である。

$$(\text{答}) (s, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

(c)

α, β が $\alpha + \beta = s, \alpha\beta = -t$ をみたすとき、(b) の結果を用いて

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= (\alpha + \beta)P_{n+1} - \alpha\beta P_n \\ \Leftrightarrow \begin{cases} P_{n+2} - \alpha P_{n+1} = \beta(P_{n+1} - \alpha P_n) \\ P_{n+2} - \beta P_{n+1} = \alpha(P_{n+1} - \beta P_n) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} P_{n+1} - \alpha P_n = \beta^{n-1}(P_2 - \alpha P_1) \\ P_{n+1} - \beta P_n = \alpha^{n-1}(P_2 - \beta P_1) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。(a) の結果を用いて

$$\begin{cases} P_{n+1} - \alpha P_n = \beta^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \alpha \cdot 1\right) \\ P_{n+1} - \beta P_n = \alpha^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \beta \cdot 1\right) \end{cases}$$

となるから

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)P_n &= \beta^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \alpha \cdot 1\right) - \alpha^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \beta \cdot 1\right) \\ \Leftrightarrow P_n &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left\{ \beta^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \alpha\right) - \alpha^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \beta\right) \right\} \quad (\because \alpha < \beta) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) P_n = \frac{1}{\beta - \alpha} \left\{ \beta^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \alpha\right) - \alpha^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \beta\right) \right\}$$

(d)

(b) の結果を用いて

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \alpha\beta = -\frac{1}{4}$$

となるから、解と係数の関係より α, β は x に関する 2 次方程式

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

の 2 解となる。

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

であるから、 $\alpha < \beta$ より

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}, \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}, \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

(e)

(c) の結果を用いて

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left\{ \beta^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \alpha\right) - \alpha^{n-1} \left(\frac{3}{4} - \beta\right) \right\} \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left\{ \beta^n \cdot \frac{1}{\beta} \left(\frac{3}{4} - \alpha\right) - \alpha^n \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\frac{3}{4} - \beta\right) \right\} \end{aligned}$$

となり、(d) の結果を用いて

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\beta^n \cdot \frac{4}{1 + \sqrt{5}} - \frac{2 + \sqrt{5}}{4} - \alpha^n \cdot \frac{4}{1 - \sqrt{5}} + \frac{2 - \sqrt{5}}{4} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\beta^n \cdot \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} - \alpha^n \cdot \frac{2 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \left(\beta^n - \alpha^n \cdot \frac{2 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$\frac{2 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$$

であり、 $2 < \sqrt{5} < 3$ より

$$-\frac{1}{2} < \alpha < -\frac{1}{4}, \frac{3}{4} < \beta < 1, 0 < \frac{2 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} < 1$$

となるから、 $a = -\alpha, b = \beta, c = \frac{2 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$ とおくと

$$0 < a < b, 0 < c < 1$$

をみたす。よって、(1) の結果を用いて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\beta^n - \alpha^n \cdot \frac{2 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{n}} = \beta$$

となる。また

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} > 0$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\beta^n - \alpha^n \cdot \frac{2 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= 1 \cdot \beta \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

2

(1)

$f(x) = x^3 - x^2 - 4x - 1$ とおくとき、方程式 $f(x) = 0$ の実数解は高々3個ある。ここで

$$f(-2) = -5 < 0$$

$$f(-1) = 1 > 0$$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = -5 < 0$$

$$f(2) = -5 < 0$$

$$f(3) = 5 > 0$$

より

$$f(-2) < 0 < f(-1), f(-1) > 0 > f(0), f(0) < 0 < f(3)$$

となるから、方程式 $f(x) = 0$ は

$$-2 < x < -1, -1 < x < 0, 0 < x < 3$$

の範囲にそれぞれ1個ずつ実数解をもつ。よって、方程式 $f(x) = 0$ の正の実数解は1個、負の実数解は2個ある。

(答) 正の実数解：1個、負の実数解：2個

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)\{x^2 + g(a)x + h(a)\} \\ &= x^3 + \{g(a) - a\}x^2 + \{h(a) - ag(a)\}x - ah(a) \end{aligned}$$

が成り立つとき

$$\begin{cases} g(a) - a = -1 \\ h(a) - ag(a) = -4 \\ -ah(a) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(a) = a - 1 \\ h(a) = a^2 - a - 4 \\ ah(a) = 1 \end{cases}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} ah(a) &= a(a^2 - a - 4) \\ &= a^3 - a^2 - 4a \\ &= f(a) + 1 \end{aligned}$$

であり、 a が方程式 $f(x) = 0$ の解とするとき $f(a) = 0$ となるから、 $ah(a) = 1$ は方程式 $f(x) = 0$ のすべての実数解 a に対して成り立つ。以上より

$$g(t) = t - 1, h(t) = t^2 - t - 4$$

となる。

(答) $g(t) = t - 1, h(t) = t^2 - t - 4$

(3)

(2)の結果を用いて

$$f(x) = (x-a)\{x^2 + (a-1)x + a^2 - a - 4\}$$

と表される。ここで

$$(a^2 - 2a - 2) + (-a^2 + a + 3) = -a + 1$$

$$\begin{aligned} (a^2 - 2a - 2)(-a^2 + a + 3) &= -a^4 + 3a^3 + 3a^2 - 8a - 6 \\ &= -(a-2)(a^3 - a^2 - 4a - 1) + a^2 - a - 4 \\ &= -(a-2)f(a) + a^2 - a - 4 \\ &= a^2 - a - 4 \quad (\because f(a) = 0) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)\left[x^2 - \{(a^2 - 2a - 2) + (-a^2 + a + 3)\}x + (a^2 - 2a - 2)(-a^2 + a + 3)\right] \\ &= (x-a)\{x - (a^2 - 2a - 2)\}\{x - (-a^2 + a + 3)\} \end{aligned}$$

となり、 $a^2 - 2a - 2$ と $-a^2 + a + 3$ もまた方程式 $f(x) = 0$ の解であることは示された。

(証明終)

(4)

(3)の結果より、 $a, a^2 - 2a - 2, -a^2 + a + 3$ は方程式 $f(x) = 0$ の異なる3つの実数解である。 a が最大の実数解であるとき、(1)の結果より方程式 $f(x) = 0$ の解は1つが正、2つが負であるから、 a は正、 $a^2 - 2a - 2, -a^2 + a + 3$ は負となる。

(答) $a^2 - 2a - 2, -a^2 + a + 3$ はともに負