

1

【解答】

- (1) (i) ア 1 イ 2
(ii) ウ 1 エ 3 オ 9
(2) カ 1 キ 9 ク 1 ケ 6 コ 1
サ 1 シ 9 ス 1 セ 9 ソ 1
タ 6 チ 5 ツ 4
(3) テ 1 ト 4 ナ 3 ニ 4 ヌ 2
ネ 7 ノ 1 ハ 2

【解説】

(1)

(i)

$$f(x)=|x^2-x|+1 \text{ であるとき}$$

$$\log_3 f(x)=1$$

$$\Leftrightarrow f(x)=3$$

$$\Leftrightarrow |x^2-x|+1=3$$

$$\Leftrightarrow |x(x-1)|-2=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

[1] $x \leq 0, 1 \leq x$ のとき

①より

$$x(x-1)-2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1, 2$$

となり、これらはともに $x \leq 0, 1 \leq x$ を満たす。

[2] $0 < x < 1$ のとき

①より

$$-x(x-1)-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=0$$

を満たす実数 x は存在しない。

以上, [1], [2] より, $\log_3 f(x)=1$ の実数解は $x=-1, 2$ である。

(ii)

$X=\log_3 x$ とおくと, (i) の結果を用いて

$$f(\log_3 x)=3$$

$$\Leftrightarrow f(X)=3$$

$$\Leftrightarrow X=-1, 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x=-1, 2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}, 9$$

となる。

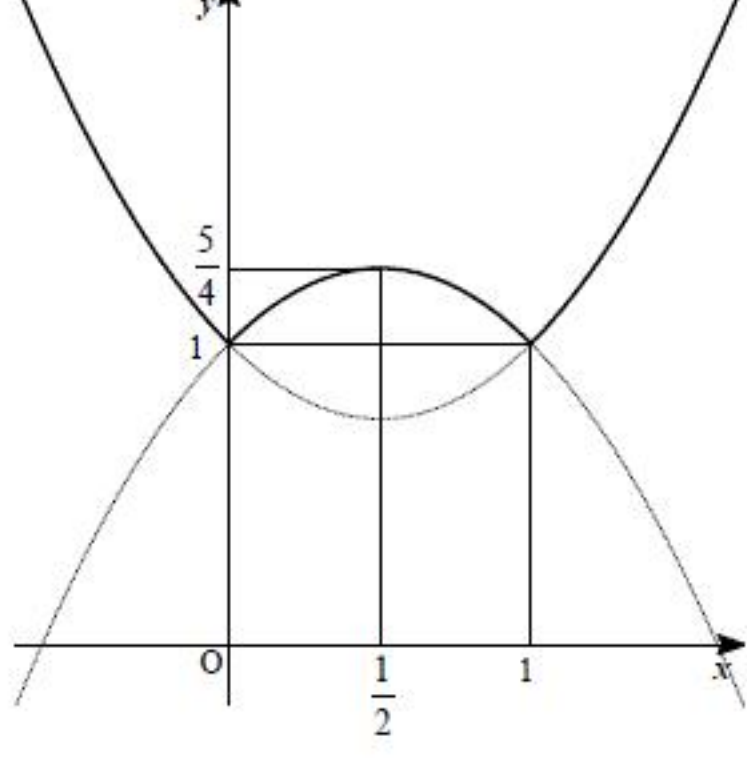
(2)

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & (x \leq 0, 1 \leq x) \\ -x^2+x+1 & (0 < x < 1) \end{cases}$$

であり, さらに

$$-x^2+x+1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

であるから, $y=f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



方程式 $f(x)=a$ の実数解は $y=f(x)$ と $y=a$ の共有点の x 座標にあたる。 $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ であ

るから, 上図より区間 $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{3}$ において $f(x)$ は単調増加する。よって, この区間に

$f(x)=a$ が少なくとも 1 つの実数解をもつ, つまり, $y=f(x)$ と $y=a$ が少なくとも 1 つの共

有点をもつのは

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \leq a \leq f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{16} \leq a \leq \frac{11}{9}$$

のときである。また, $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ であり, また $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{19}{16}, f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{11}{9}$ より $f\left(\frac{1}{4}\right) < f\left(\frac{2}{3}\right)$ で

あるから, 上図より区間 $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{2}{3}$ において, $f(x)=a$ が少なくとも 1 つの実数解をもつ, つ

まり, $y=f(x)$ と $y=a$ が少なくとも 1 つの共有点をもつのは

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \leq a \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{16} \leq a \leq \frac{5}{4}$$

のときである。

(3)

(2) の結果を用いて, 方程式 $f(x)=f(b)$ ($b > 0$) が区間 $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{2}{3}$ に少なくとも 1 つの実数解

をもつのは

$$\frac{19}{16} \leq f(b) \leq \frac{5}{4}$$

となるときである。ここで

$$f(x)=\frac{19}{16}, f(x)=\frac{5}{4}$$

を満たす x の値を求める。

[1] $x \geq 1$ のとき

$$f(x)=\frac{19}{16}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+1=\frac{19}{16}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}(2+\sqrt{7})$$

$$f(x)=\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+1=\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$$

である。

[2] $0 < x < 1$ のとき

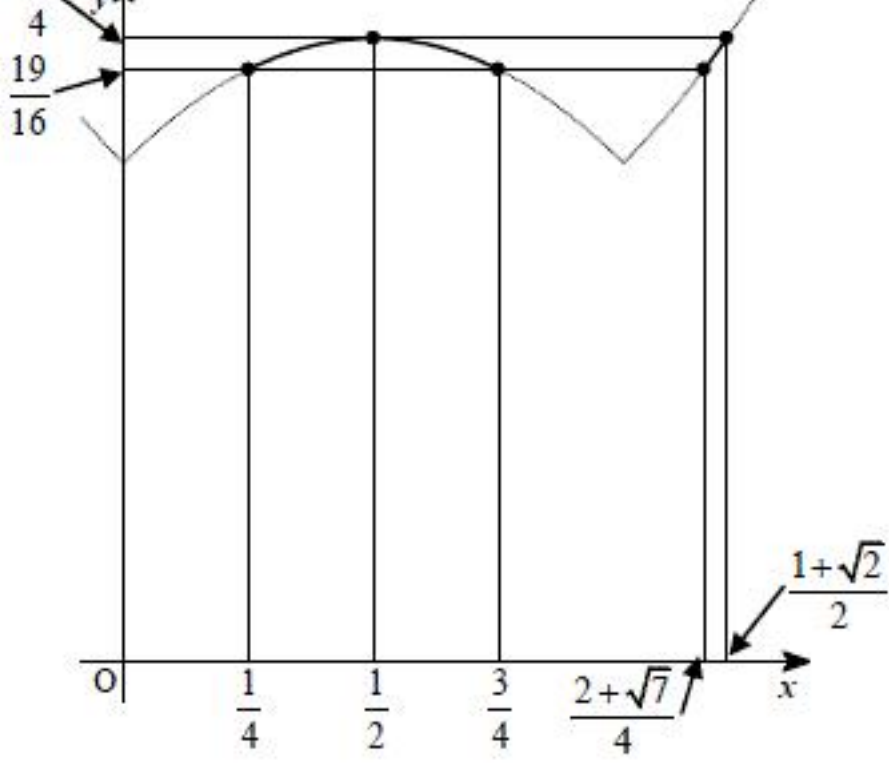
(2) より $f(x)=\frac{19}{16}$ を満たす x の値の 1 つは $x=\frac{1}{4}$ であり, 関数 $f(x)$ の対称性より, もう 1

つの値は

$$2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

となる。また, (2) より $f(x)=\frac{5}{4}$ を満たす x の値は $x=\frac{1}{2}$ である。

以上, [1], [2] より, 下図を得る。



よって, 求める正の定数 b の値の範囲は

$$\frac{1}{4} \leq b \leq \frac{3}{4}, \frac{1}{4}(2+\sqrt{7}) \leq b \leq \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$$

となる。

2

【解答】

- (1) ア 1 イ 2 ウ 1 エ 1
 (2) オ 3 カ 1 キ 1 ク 2 ケ 1 コ 1
 サ 1 シ 2 ス 1 セ 1 ソ 1
 (3) タ 1 チ 6 ツ 1 テ 1 ト 1 ナ 2

【解説】

- (1) 三角形 OAB の面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2^2 \cdot 3^2 - 5^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{11} \end{aligned}$$

となる。

- (2)

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}$ が $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直であるとき

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \vec{p} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{p} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ x\vec{a} \cdot \vec{b} + y|\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\angle AOC = \angle BOC$ であるから

$$\cos \angle AOC = \cos \angle BOC = t$$

であり

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \angle BOC \\ &= 3t \\ \vec{c} \cdot \vec{a} &= |\vec{c}| |\vec{a}| \cos \angle AOC \\ &= 2t \end{aligned}$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 4x + 5y + 2t = 0 \\ 5x + 9y + 3t = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &(x, y) = \left(-\frac{3}{11}t, -\frac{2}{11}t \right) \end{aligned}$$

となり、このとき

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{c} &= x\vec{a} \cdot \vec{c} + y\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= -\frac{3}{11}t \cdot 2t + \left(-\frac{2}{11}t \right) \cdot 3t + 1 \\ &= -\frac{12}{11}t^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。

- (3)

点 H を

$$\overrightarrow{HC} = -\frac{3}{11}t\vec{a} - \frac{2}{11}t\vec{b} + \vec{c}$$

を満たす点とすると

$$\overrightarrow{OH} = \frac{3}{11}t\vec{a} + \frac{2}{11}t\vec{b}$$

より、点 H は平面 OAB 上の点であり、(2)の結果より直線 CH は平面 OAB に垂直である。よって、四面体 OABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot |\overrightarrow{HC}|$$

と表される。ここで、 $\vec{c}$ と $\overrightarrow{HC}$ のなす角を θ とおくと

$$|\overrightarrow{HC}| = |\vec{c}| \cos \theta$$

であり、 $|\overrightarrow{HC}| |\vec{c}| \cos \theta = \overrightarrow{HC} \cdot \vec{c}$ であるから、(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{HC}|^2 &= |\overrightarrow{HC}| |\vec{c}| \cos \theta \\ &= \overrightarrow{HC} \cdot \vec{c} \\ &= -\frac{12}{11}t^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{11} \cdot \sqrt{-\frac{12}{11}t^2 + 1} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{11 - 12t^2} \end{aligned}$$

である。

3

【解答】

- (1) ア 7 イ 2 ウ 5 エ 4
(2) オ 5 カ 3 キ 7 ク 6 ケ 4
(3) コ 3 サ 3 シ 7 ス 6 セ 4 ソ 3
タ 4 チ 9 ツ 1 テ 0 ト 2 ナ 4

【解説】

- (1) さいころの目の出方は同様に確からしいとする。二つのさいころの目の組合せとその和は下の表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

よって、二つのさいころの目の和が4の倍数となる組み合わせは9通りある。よって、A君がB君からコインを m 枚もらう確率は $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$ であり、B君がA君からコインを2枚もらう確率は $\frac{3}{4}$ である。よって、(G)を1回行うとき、A君が持っているコインの枚数の期待値は

$$\frac{1}{4}(6+m)+\frac{3}{4}(6-2)=\frac{1}{4}(m+18)$$

であり、これが6より大きくなるのは

$$\frac{1}{4}(m+18)>6$$
$$\Leftrightarrow m>6$$

のときであり、 m は自然数であるから

$$m\geq 7$$

のときである。 $m=7$ のときの期待値は

$$\frac{1}{4}(7+18)=\frac{25}{4}$$

である。

- (2) 「二つのさいころの目の和が4の倍数になる」事象をQとし、「二つのさいころの目の和が4の倍数とならない」事象をRとする。(G)を3回行うとき、3回Qが起こる確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

であり、2回Q、1回Rが起こる確率は

$${}_3C_1\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64}$$

であり、1回Q、2回Rが起こる確率は

$${}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$$

である。ここで

$$\frac{1}{64}+\frac{9}{64}<\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{64}+\frac{9}{64}+\frac{27}{64}>\frac{1}{2}$$

であるから、A君が6枚より多くのコインを持っている確率が $\frac{1}{2}$ より大きくなるためには、1回Q、2回Rが起こるときにA君の持っているコインの枚数が6枚よりも多くなればよく、1回Q、2回Rが起こるときにA君の持っているコインの枚数は

$$6+m-2\times 2=2+m$$

であるから

$$2+m>6$$

となればよい。 m が自然数であることから

$$m\geq 5$$

となる。また、 $m=5$ のとき、A君が6枚より多くのコインを持っている確率は

$$\frac{1}{64}+\frac{9}{64}+\frac{27}{64}=\frac{37}{64}$$

である。

- (3) (G)を5回行うとき、A君が持っているコインの枚数が0になるには、A君が最初に6枚のコインを持っていることから、事象Rが少なくとも3回起こらなければならない。よって、ゲームが行われる回数も3回以上となる。

- [1] ゲームが3回行われるとき 事象Rが3回起こるときA君のコインの枚数は0になる。よって、ゲームが終了する確率は

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$

である。

- [2] ゲームが4回行われるとき (G)を3回行った時点で、A君が持っているコインの枚数が1枚または2枚であることが必要である。しかし、(G)を3回行った時点でA君が持っているコインの枚数として起こり得るのは $6+3m$ 枚、 $4+2m$ 枚、 $2+m$ 枚のいずれかであり、この条件を満たす自然数 m は存在しない。よって、4回行った時点でA君が持っているコインの枚数が0になる確率は0である。

- [3] ゲームが5回行われるとき (G)を4回行った時点で、A君が持っているコインの枚数が1枚または2枚であることが必要である。(G)を4回行った時点でA君が持っているコインの枚数として起こり得るのは $6+4m$ 枚、 $4+3m$ 枚、 $2+2m$ 枚、 m 枚である。

- [a] $m\geq 3$ のとき 条件を満たす自然数 m は存在しない。よって、ゲームを5回行った時点でA君が持っているコインの枚数が0になる確率は0である。

- [b] $m<3$ のとき ゲームを4回行った時点で、A君がコインを m 枚持っており、最後の1回で事象Rが起こればよい。つまり、最初の3回でQが1回、Rが2回起こり、最後の2回で事象Rが2回起こればおこればよい。よって、ゲームを5回行った時点でA君が持っているコインの枚数が0になる確率は

$${}_3C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{243}{1024}$$

である。

以上、[1]、[2]、[3]より、(G)を5回行うときにA君が1枚もコインを持っていない確率は

$$m\geq 3のとき\frac{27}{64}+0+0=\frac{27}{64}$$

$$m<3のとき\frac{27}{64}+0+0+\frac{243}{1024}=\frac{675}{1024}$$

となるから、A君がコインを少なくとも1枚持っている確率は

$$m\geq 3のとき1-\frac{27}{64}=\frac{37}{64}$$

$$m<3のとき1-\frac{675}{1024}=\frac{349}{1024}$$

となる。

【解答】

- (1) ア 1 イ 2 ウ 2 エ 1 オ 4
 (2) カ 3 キ 2 ク 2 ケ 7 コ 3
 サ 1 シ 3
 (3) ス 2 セ 3 ソ 3
 (4) タ 8 チ 9

【解説】

(1)

$C: y = -(x-a)^2 + k^2$ と x 軸の交点の x 座標は

$$0 = -(x-a)^2 + k^2$$

$$\Leftrightarrow x = a \pm k$$

となる。このうち大きいほうの値が点 P の x 座標にあたり、 $k > 0$ であるから $P(a+k, 0)$ となる。よって

$$-a \leq k \leq a \qquad \cdots (*)$$

であることより

$$OP = a+k \ (\geq 0)$$

である。また、 C と y 軸の交点の y 座標は

$$y = -a^2 + k^2$$

となるから、 $Q(0, -a^2 + k^2)$ である。よって、(*)より

$$OQ = -a^2 + k^2 \ (\geq 0)$$

である。以上より

$$OP + OQ = a+k - a^2 + k^2$$

$$= -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + k^2 + k + \frac{1}{4}$$

となる。

[1] $k \leq \frac{1}{2}$ のとき

(*)において、 $OP + OQ$ は

$$a = k \text{ のとき最大値 } M = 2k$$

をとる。

[2] $k > \frac{1}{2}$ のとき

(*)において、 $OP + OQ$ は

$$a = \frac{1}{2} \text{ のとき最大値 } M = k^2 + k + \frac{1}{4}$$

となる。

(2)

(1)の結果を用いて

$$OP \times OQ = (a+k)(-a^2 + k^2)$$

$$= -a^3 - ka^2 + k^2a + k^3$$

となる。ここで

$$f(a) = -a^3 - ka^2 + k^2a + k^3$$

とおくと

$$f'(a) = -3a^2 - 2ka + k^2$$

$$= -(3a-k)(a+k)$$

となる。 $k > 0$ であることから、(*)における $f(a)$ の増減表は次のようになる。

a	$-k$	$\cdots$	$\frac{1}{3}k$	$\cdots$	k
$f'(a)$	0	+	0	-	
$f(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって、 $OP \times OQ$ は

$$a = \frac{1}{3}k \text{ のとき最大値 } N = f\left(\frac{1}{3}k\right) = \frac{32}{27}k^3$$

をとる。

(3)

$P(a+k, 0)$ 、 $Q(0, -a^2 + k^2)$ であるから、直線 PQ の方程式は

$$y = \frac{0 - (-a^2 + k^2)}{(a+k) - 0}x + (-a^2 + k^2)$$

$$\Leftrightarrow y = (a-k)x + (-a^2 + k^2)$$

となる。よって、直線 PQ と直線 $x = t$ の交点の y 座標は

$$y = (a-k)t + (-a^2 + k^2)$$

$$= -\left(a - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4} - kt + k^2$$

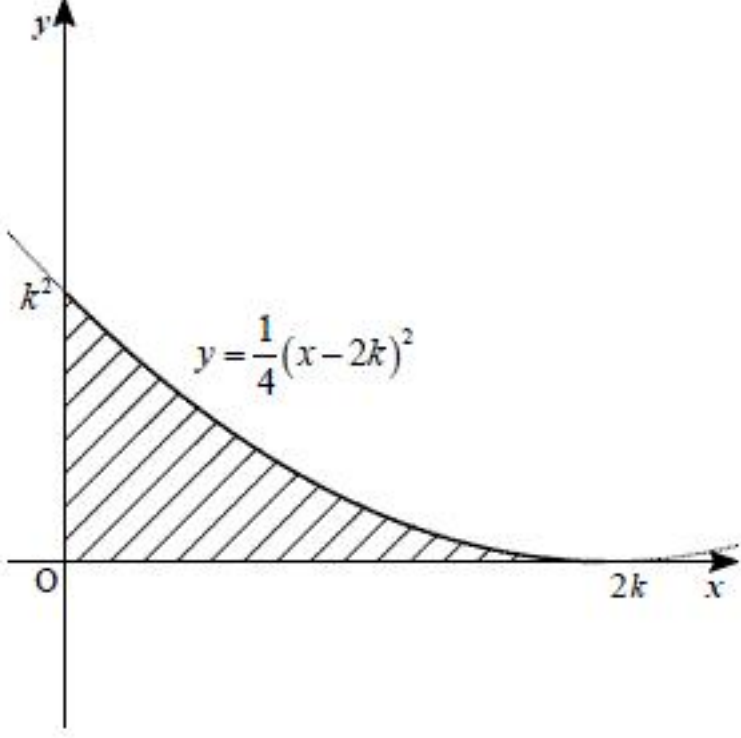
となる。(*)より、領域 D の $x = t$ における y 座標の最大値は $a = \frac{t}{2}$ のとき

$$\frac{t^2}{4} - kt + k^2 = \frac{1}{4}(t-2k)^2$$

である。よって、 Q の y 座標は 0 以上であり、 P は $(0, 0)$ から $(2k, 0)$ まで x 軸上を動くことに注意すると、領域 D は

$$0 \leq y \leq \frac{1}{4}(x-2k)^2 \quad (0 \leq x \leq 2k)$$

となり、下図の斜線部のようになる。



よって、領域 D の面積 S は

$$S = \int_0^{2k} \frac{1}{4}(x-2k)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{12}(x-2k)^3 \right]_0^{2k}$$

$$= \frac{2}{3}k^3$$

となる。

(4)

D に含まれる三角形のうち面積が最大になりうるのは、3 辺が x 軸、 y 軸、 $y = \frac{1}{4}(x-2k)^2$ の

接線となる場合である。ここで、(*)を満たす a の値において線分 PQ は $y = \frac{1}{4}(x-2k)^2$ の接線

であるから、 D に含まれる三角形として $\triangle OPQ$ を考える。 $\triangle OPQ$ の面積を T とおくと

$$T = \frac{1}{2} \times OP \times OQ$$

となるから、(2)の結果を用いて T の最大値 S_0 は

$$S_0 = \frac{1}{2}N$$

$$= \frac{16}{27}k^3$$

である。よって

$$\frac{S_0}{S} = \frac{\frac{16}{27}k^3}{\frac{2}{3}k^3}$$

$$= \frac{8}{9}$$

となる。