

(1)	$\boxed{\text{ア}}$	1	$\boxed{\text{イ}}$	3
(2)	$\boxed{\text{ウ}}$	1		
(3)	$\boxed{\text{エ}}$	6		

〔解説〕

(1)

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とおくと,

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{3}, \overrightarrow{AG_2} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$$

が成り立つので,

$$\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{AG_2} - \overrightarrow{AG_1} = \frac{\vec{b}}{3}$$

である。よって,

$$\frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{3}$$

(2)

F は点 B, D, E を通る平面上にあるので, s, t を実数として

$$\overrightarrow{AF} = (1-s-t)\vec{b} + s\vec{d} + t\overrightarrow{AE} = (1-s-t)\vec{b} + \frac{2}{3}t\vec{c} + s\vec{d} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。さらに, F は線分 G_1G_2 上にあるので, p を実数として

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AG_1} + p\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{p}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d} \quad \dots \textcircled{2}$$

とも表せる。 $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ は互いに一次独立なので, ①と②を係数比較して

$$1-s-t = \frac{p}{3}, \frac{2}{3}t = \frac{1}{3}, s = \frac{1}{3}$$

これを解くと,

$$s = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{2}, p = \frac{1}{2}$$

$p = \frac{1}{2}$ なので, F は線分 G_1G_2 の中点である。よって,

$$\frac{FG_2}{G_1F} = 1$$

(3)

$AB = 4, AC = 4$ より, $|\vec{b}|^2 = 16, |\vec{c}|^2 = 16$ である。

また, $\angle BAC$ と $\angle BAD$ が直角なので $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \vec{b} \cdot \vec{d} = 0$ である。

このもとで, さらに $\angle BFE$ が直角なので

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{EF} &= 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{5}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{36}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{9}|\vec{c}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{d}|^2 = 0 \quad (\because \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} = 0) \\ &\Leftrightarrow |\vec{d}| = 6 \quad (\because |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 16) \end{aligned}$$

【解説】

$f(x)=0$ と $f'(x)=0$ が共通解をもつ条件は、 $f(x)$ が $(x-p)^2$ (p は実数) で割り切れることである。

- [1] $x^2+2ax-5a^3-4$ が $x-2a-2$ で割り切れる場合
この条件は

$$(2a+2)^2+2a(2a+2)-5a^3-4=0 \Leftrightarrow 5a^3-8a^2-12a=0 \Leftrightarrow a=0, \frac{4 \pm 2\sqrt{19}}{5}$$

- [2] $x^2+2ax-5a^3-4$ が $(x-p)^2$ で割り切れる場合

$$x^2+2ax-5a^3-4=(x+a)^2-5a^3-a^2-4$$

なので、求める条件は

$$5a^3+a^2+4=0 \Leftrightarrow (a+1)(5a^2-4a+4)=0$$

である。 $5a^2-4a+4=5\left(a-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}>0$ なので、この実数解は $a=-1$ のみ。

以上より、 $f(x)=0$ と $f'(x)=0$ が共通解をもつ a の値は 4 個あり、そのうち整数は 2 個である。

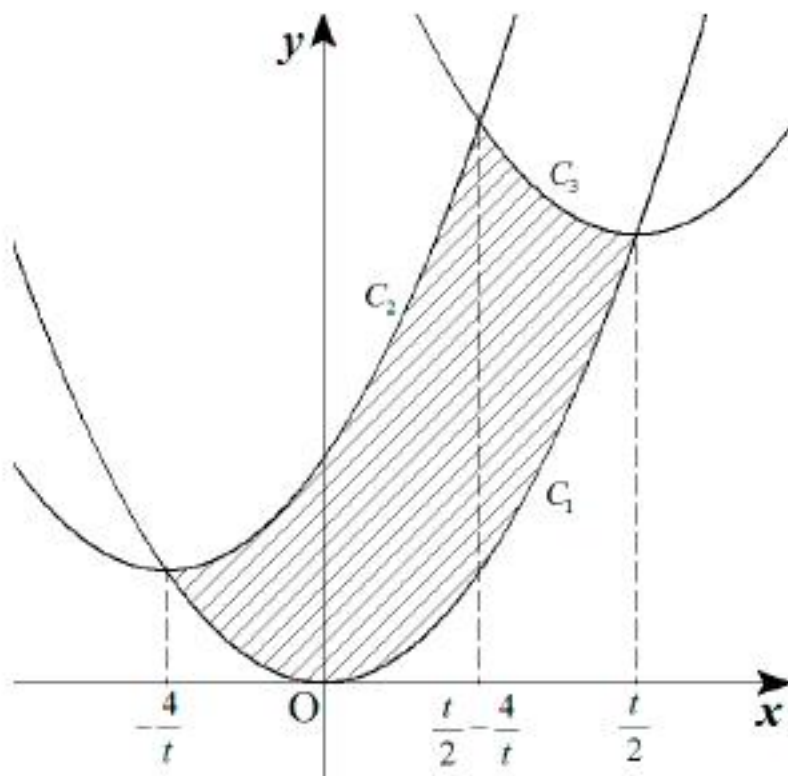
キ	2	ク	4	ケ	4	コ	1
サ	6	シ	8	ス	4	セ	2
ソ	8	タ	3	チ	2		

【解説】

C_2 と C_3 の式を連立して解けば、交点の座標が求まる。

$$\left(x + \frac{4}{t}\right)^2 + \frac{16}{t^2} = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow \left(t + \frac{8}{t}\right)x = \frac{t^2}{2} - \frac{32}{t^2} \Leftrightarrow x = \frac{t}{2} - \frac{4}{t}$$

$$y = \left(x + \frac{4}{t}\right)^2 + \frac{16}{t^2} = \frac{t^2}{4} + \frac{16}{t^2}$$



$S(t)$ は上図斜線部の面積である。よって、

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{t/2-4/t}^{t/2} \left\{ \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4} \right\} dx + \int_{-4/t}^{t/2-4/t} \left\{ \left(x + \frac{4}{t}\right)^2 + \frac{16}{t^2} \right\} dx - \int_{-4/t}^{t/2} x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{t}{2}\right)^3 + \frac{t^2}{4} x \right]_{t/2-4/t}^{t/2} + \left[\frac{1}{3} \left(x + \frac{4}{t}\right)^3 + \frac{16}{t^2} x \right]_{-4/t}^{t/2-4/t} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-4/t}^{t/2} \\ &= t + \frac{8}{t} \end{aligned}$$

$t > 0$ のとき $\frac{8}{t} > 0$ なので、相加・相乗平均の関係を用いると

$$S(t) = t + \frac{8}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{8}{t}} = 4\sqrt{2} \quad (\text{等号成立は } t = \frac{8}{t} \Leftrightarrow t = 2\sqrt{2} \text{ のとき})$$

$C_2: y = (x+1)^2 + 1$ と $C_3: y = (x-2)^2 + 4$ の共通接線を求める。それぞれの接点の x 座標を s, u

とおくと、接線の方程式は

$$y = 2(s+1)(x-s) + (s+1)^2 + 1 = 2(s+1)x - s^2 + 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = 2(u-2)(x-u) + (u-2)^2 + 4 = 2(u-2)x - u^2 + 8 \quad \dots \textcircled{2}$$

のように2通りに表せる。①と②を係数比較すると

$$\begin{cases} s+1 = u-2 \\ s^2 - 2 = u^2 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow s = -\frac{1}{2}, u = \frac{5}{2}$$

を得る。よって、接線の方程式は $y = x + \frac{7}{4}$ である。共通接線と C_1 の交点の x 座標を

α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、 α, β は

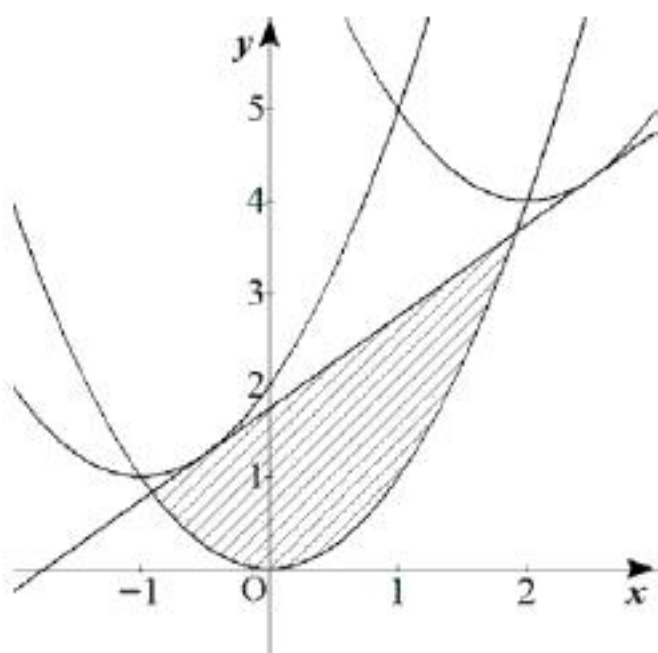
$$x^2 = x + \frac{7}{4} \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{7}{4} = 0$$

の2実数解なので、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -\frac{7}{4}$$

求めるのは右図斜線部の面積なので

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \left(x + \frac{7}{4} - x^2 \right) dx &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6} \left\{ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$



(1)	ツ	4	テ	5		
(2)	ト	6	ナ	1	ニ	1
	ヌ	0	ネ	8	ノ	5
(3)	ハ	5	ヒ	0	フ	2
	ヘ	4				

【解説】

(1)

①を $\sin \theta$ の式に変形する。

$$3\sin \theta - 4\sin^3 \theta - 3\sin \theta + a(1 - \sin^2 \theta) - 5 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^3 \theta + a\sin^2 \theta - a + 5 = 0$$

よって、 $\sin \theta = x$ とおくと

$$4x^3 + ax^2 - a + 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(2)

②の左辺を $f(x)$ とおくと

$$f'(x) = 12x^2 + 2ax = 2x(6x + a)$$

よって、 $-6 < a < 0$ のとき、 $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	-1	...	0	...	$-\frac{a}{6}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	↗	極大値	↘	極小値	↗	9

増減表より、 $f(x)$ は $x = -\frac{a}{6}$ のとき極小値 $\frac{1}{108}a^3 - a + 5$ をとる。

(3)

[1] $-6 < a < 0$ のとき

$$g(a) = f\left(-\frac{a}{6}\right) = \frac{1}{108}a^3 - a + 5 \text{ とおくと、 } g'(a) = \frac{1}{36}a^2 - 1 < 0 \quad (-6 < a < 0) \text{ なので}$$

$-6 < a < 0$ において $g(a)$ は単調減少する。よって、 $g(a) > g(0) = 5$ が得られ、増減表と合わせて考えると $f(x) = 0$ は $-1 \leq x \leq 1$ の範囲に実数解をもたない。

[2] $a \leq -6$ のとき

$f(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	1	↗	極大値	↘	9

増減表より、 $f(x) = 0$ は $-1 \leq x \leq 1$ の範囲に実数解をもたない。

[3] $a = 0$ のとき

$f(x) = 4x^3 + 5 = 0$ は、 $-1 \leq x \leq 1$ の範囲に実数解をもたない。

[4] $0 < a < 6$ のとき

$f(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	-1	...	$-\frac{a}{6}$	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	↗	極大値	↘	極小値	↗	9

よって、 $f(0) = -a + 5$ の正負によって実数解の個数が決まる。つまり、

$f(0) > 0 \Leftrightarrow a < 5$ のとき、実数解をもたない。

$f(0) = 0 \Leftrightarrow a = 5$ のとき、実数解を 1 個もつ。

$f(0) < 0 \Leftrightarrow a > 5$ のとき、実数解を 2 個もつ。

[5] $a \geq 6$ のとき

$f(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	↘	極小値	↗	9

$f(0) < 0$ より、実数解を 2 個もつ。

以上まとめると、 $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x) = 0$ の実数解の個数は

$a < 5$ のとき 0 個、 $a = 5$ のとき 1 個、 $a > 5$ のとき 2 個 である。

また、この実数解は $x \neq \pm 1$ であるので、1 個の x に対して 2 個の θ が対応する。

よって、①の $0 \leq \theta < 2\pi$ における実数解の個数は

$a < 5$ のとき 0 個、 $a = 5$ のとき 2 個、 $a > 5$ のとき 4 個 である。

ホ	4	マ	1	ミ	0	ム	2
メ	6	モ	7	ヤ	6	ユ	2
ヨ	3	ラ	2				

〔解説〕

0,1 の書き入れ方の総数を f_n とおく。

[1] $n = 2$ のとき

1	0	0	1
0	1	1	0

よって, $f_2 = 2$

[2] $n = 3$ のとき

1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0

よって, $f_3 = 4$

[3] $n = k$ ($k \geq 4$) のとき

[i] 1 行 1 列に 1 を書き入れるとき

1	0	0	0	0
0				
0				
0				
0				

0,1 を書き入れたマスを取り除くと $n = k - 1$ の場合に帰着するので, 残りの 0,1 の書き入れ方は f_{k-1} 通り。

[ii] 1 行 l ($l \geq 2$) 列に 1 を書き入れるとき

0	0	1	0	0
0		0		
1	0	0	0	0
0		0		
0		0		

0,1 を書き入れたマスを取り除き, 残ったマスを寄せ集めると $n = k - 2$ の場合に帰着するので, 残りの 0,1 の書き入れ方は f_{k-2} 通り。さらに, l の選び方には $k - 1$ 通りあるので, $(k - 1)f_{k-2}$ 通り。

[i][ii] より, 漸化式 $f_k = f_{k-1} + (k - 1)f_{k-2}$ ($k \geq 4$) が成り立つ。よって, 順番に計算すると

$$f_4 = f_3 + 3f_2 = 10, f_5 = f_4 + 4f_3 = 26, f_6 = f_5 + 5f_4 = 76, f_7 = f_6 + 6f_5 = 232$$