

$$\boxed{1}$$

(1) (i) $DP^2 = t^2 + \boxed{5}$. …ア

$t = \frac{\boxed{7}}{\boxed{3}}$. …イ, ウ

(ii) 重心 G は $\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}, \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}, \boxed{1}\right)$ …エ, オ, カ, キ, ク

$t = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$. …ケ, コ

(2) (i) $\theta_n = \frac{n\pi - \alpha}{\boxed{4}}$. …サ

$\cos \alpha = \frac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$. …シ, ス $\sin \alpha = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}$. …セ, ソ

(ii) $y_n = (-1)^{n-1} \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}} e^{3\theta_n}$. …タ, チ

(iii) $C = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$. …ツ, テ

(3) $\alpha = \frac{\boxed{1} - \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$. …ト, ナ, ニ $\beta = \frac{\boxed{1} + \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$. …ヌ, ネ, ノ

$S = \frac{\boxed{13} - \boxed{5}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{24}}$. …ハ, ヒ, フ, ヘ, ホ, マ $T = \frac{\boxed{13} + \boxed{5}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{24}}$. …ミ, ム, メ, モ, ヤ, ヨ

2

(1) $A^2 = O$. $\cdots$ [答]

(2) $x = -1$. $\cdots$ [答]

(3) $AB + BA = E$ の両辺に左から A をかけて、 $A^2B + ABA = A$.
 $A^2 = O$ なので、 $ABA = A$. (証明終わり)

(4) $(AB)^n + (BA)^n = E$. $\cdots$ [答]

3

(1) (i)

部分積分より,

$$I(m, n) = \left[x^m \cdot \frac{-1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 m x^{m-1} \cdot \frac{-1}{n+1} (1-x)^{n+1} dx$$

$$= \frac{m}{n+1} \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n+1} dx. \quad (\text{証明終わり})$$

(ii)

$$I(m, n) = \frac{m}{n+1} I(m-1, n+1) = \frac{m}{n+1} \cdot \frac{m-1}{n+2} I(m-2, n+2) = \dots$$

$$= \frac{m!}{(n+1)(n+2) \times \dots \times (n+m)} I(0, n+m) = \frac{m!n!}{(n+m)!} I(0, n+m).$$

ここで,

$$I(0, n+m) = \int_0^1 x^0 (1-x)^{n+m} dx = \left[\frac{-1}{n+m+1} (1-x)^{n+m+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+m+1} \quad \text{なので,}$$

$$I(m, n) = \frac{m!n!}{(n+m+1)!}. \quad (\text{証明終わり})$$

$$(2) \quad \int_0^1 {}_n C_k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} dx = {}_n C_k f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!} f\left(\frac{k}{n}\right) I(k, n-k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

$$\text{よって, } \int_0^1 P_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

$n \rightarrow \infty$ とすると, 定積分の定義 (区分求積の公式) より, これは,

$$1 \times \int_0^1 f(x) dx \text{ に収束する. } (\text{証明終わり})$$