

1

(1)	ア1 エ4 キ7 コ4	イ4 オ9 ク6 サ7	ウ9 カ5 ケ1 シ2
(2)	ス9 タ0	セ0 チ2	ソ2 ツ2
(3)	テ1 ニ8 ノ2 フ7	ト8 ヌ2 ハ1 ヘ2	ナ7 ネ5 ヒ6 ホ7

【解説】

(1) $x^2+(2k-1)x-3k^2+9k-2=0$ の判別式を D とおくと、
$$D=(2k-1)^2-4(-3k^2+9k-2)$$
$$=16k^2-40k+9$$
$$=(4k-1)(4k-9)$$
となる。 C と x 軸が異なる 2 点 P, Q で交わるためには、 $D>0$ であればよい。したがって、
 $D>0$
 $\Leftrightarrow (4k-1)(4k-9)>0$
 $\Leftrightarrow k<\frac{1}{4}, k>\frac{9}{4}$ ・・・①

となる。次に、
 $f(x)=x^2+(2k-1)x-3k^2+9k-2$
とおく。2 点 P, Q の x 座標がともに正となる条件は、①と、次の 2 式が成り立つことである。
$$\begin{cases} f(0)>0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ y=f(x) \text{ の軸の } x \text{ 座標}>0 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

②について解くと次のようになる。
 $f(0)>0$
 $\Leftrightarrow -3k^2+9k-2>0$
 $\Leftrightarrow \frac{9-\sqrt{57}}{6}<k<\frac{9+\sqrt{57}}{6}$ ・・・④
また、③について解くと次のようになる。
 $y=f(x)$ の軸の x 座標 >0
 $\Leftrightarrow \frac{1-2k}{2}>0$
 $\Leftrightarrow k<\frac{1}{2}$ ・・・⑤

①、④、⑤を同時に満たす k の範囲は、
 $\frac{9-\sqrt{57}}{6}<k<\frac{1}{4}$
である。
 C' は C を x 軸方向に 3、 y 軸方向に -2 平行移動した曲線なので、放物線 C' の軸は、
$$x=\frac{1-2k}{2}+3$$
$$=\frac{7-2k}{2}$$

となる。これが y 軸と一致する条件は、
 $\frac{7-2k}{2}=0$
 $\Leftrightarrow k=\frac{7}{2}$
である。

(2) 問題文で与えられた式を変形すると、次のようになる。
 $1+\sin^2 B=\cos^2 A+\sin^2 C$
 $\Leftrightarrow 1+\sin^2 B=1-\sin^2 A+\sin^2 C$
 $\Leftrightarrow \sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$ ・・・①

ここで、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とおくと、正弦定理より、
 $\sin A=\frac{BC}{2R}, \sin B=\frac{CA}{2R}, \sin C=\frac{AB}{2R}$
が成り立つので、これらを①に代入すると、
$$\left(\frac{BC}{2R}\right)^2+\left(\frac{CA}{2R}\right)^2=\left(\frac{AB}{2R}\right)^2$$

 $\Leftrightarrow BC^2+CA^2=AB^2$ ・・・②

となる。よって、三平方の定理の逆が成り立つので、 $C=90^\circ$ の直角三角形であるとわかる。
また、弧 AB に対応する円周角が 90° であることから、辺 AB は外接円の直径である。よって、
辺 AB の長さは、
 $AB=10\times 2$
 $=20$

となる。 $C=90^\circ$ なので、 $\triangle ABC$ の面積 S は、
 $S=\frac{1}{2}BC\cdot CA$

と表せる。 $S=21$ を代入すると、
 $BC\cdot CA=42$
となる。ここで、②より、
 $BC^2+CA^2=AB^2$
 $\Leftrightarrow (BC+CA)^2=AB^2+2BC\cdot CA$
 $\Leftrightarrow (BC+CA)^2=20^2+2\times 42$
 $=22^2$
 $\therefore BC+CA=22$ ($\because BC+CA>0$)

を得る。

(3) さいころを 1 回投げて偶数の目が出る確率は $\frac{1}{2}$ 、奇数の目が出る確率も $\frac{1}{2}$ である。

よって、3 回とも偶数の目が出る確率は、
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

である。1 回も偶数の目が出ない確率、すなわち 3 回とも奇数の目が出る確率は、
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

であるから、余事象を考えて、少なくとも 1 回は偶数の目が出る確率は、
 $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

である。

3 回の出る目の数の和が 9 となるさいころの目の組み合わせは次の 6 通りである。

(1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3)

このうち、3 回とも異なる目が出る目の組み合わせは 3 通りあり、出る順番を考慮するとそれぞれ $3!=6$ 通りある。また、2 回同じ目が出る目の組み合わせは 2 通りあり、出る順番を考慮するとそれぞれ ${}_3C_2=3$ 通りある。さらに、3 回とも同じ目が出る確率は 1 通りあり、出る順番を考慮しても 1 通りである。3 回の目の出方は全部で $6^3=216$ 通りあるので、3 回の出る目の数の和が 9 となる確率は

$$\frac{3\times 6+2\times 3+1}{216}=\frac{25}{216}$$

となる。

次に、和が 9 より小さくなる確率を求める。

[1] 和が 8 のとき

さいころの目の組み合わせは

(1, 1, 6), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3)

の 5 通り。

[2] 和が 7 のとき

さいころの目の組み合わせは

(1, 1, 5), (1, 2, 4), (1, 3, 3), (2, 2, 3)

の 4 通り。

[3] 和が 6 のとき

さいころの目の組み合わせは

(1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2)

の 3 通り。

[4] 和が 5 のとき

さいころの目の組み合わせは

(1, 1, 3), (1, 2, 2)

の 2 通り。

[5] 和が 4 のとき

さいころの目の組み合わせは

(1, 1, 2)

の 1 通り。

[6] 和が 3 のとき

さいころの目の組み合わせは

(1, 1, 1)

の 1 通り。

[1]～[6]より、和が 9 より小さくなる目の組み合わせは 16 通りであり、そのうち 3 回とも異なる目が出る目の組み合わせは 4 通り、2 回同じ目が出る目の組み合わせは 10 通り、3 回とも同じ目が出る確率は 2 通りである。先ほどと同様に考えると、和が 9 より小さくなる確率は、

$$\frac{4\times 6+10\times 3+2}{216}=\frac{7}{27}$$

となる。

(1)

第1次導関数は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= (-x+1)e^{-x} \end{aligned}$$

であり、第2次導関数は、

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x} - (-x+1)e^{-x} \\ &= (x-2)e^{-x} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} f'(x) = (-x+1)e^{-x} \\ f''(x) = (x-2)e^{-x} \end{cases}$$

(2)

接線の傾きは、接点における $f'(x)$ の値に等しいので、 $f'(x)$ が最小になる点を接点とする直線が l である。よって、 $f'(x)$ の増減を考える。全ての実数 x について、 $e^{-x} > 0$ であるから、 $f''(x) = 0$ の解は $x = 2$ のみである。これより、 $f'(x)$ の増減表を書くと次のようになる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

増減表より、 $f'(x)$ の最小値は、

$$f'(2) = -e^{-2}$$

である。したがって、接線 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ &= -e^{-2}(x-2) + 2e^{-2} \\ &= -e^{-2}x + 4e^{-2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -e^{-2}x + 4e^{-2}$$

(3)

まず、曲線 C と接線 l の位置関係を調べる。

$$g(x) = f(x) - (-e^{-2}x + 4e^{-2})$$

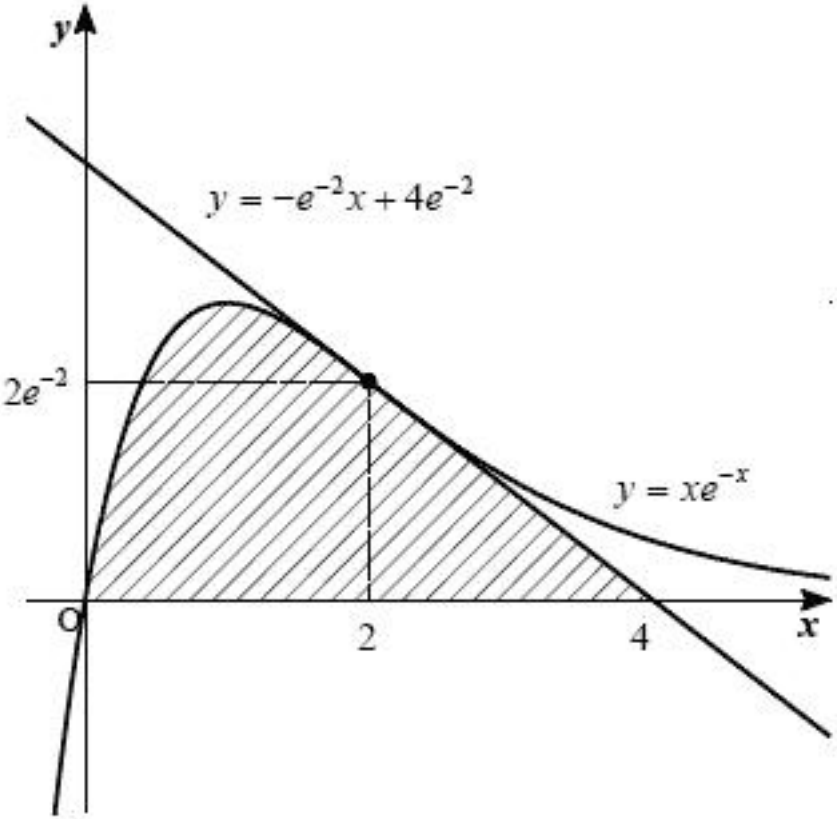
とおくと、

$$g'(x) = f'(x) - (-e^{-2})$$

となる。 $f'(x)$ の最小値が $-e^{-2}$ なので、 $g'(x) \geq 0$ 、つまり $g(x)$ は x について単調増加である。 $g(2) = 0$ であることを考慮すると、

$$\begin{aligned} g(x) > 0 &\Leftrightarrow f(x) > -e^{-2}x + 4e^{-2} & (x > 2) \\ g(x) < 0 &\Leftrightarrow f(x) < -e^{-2}x + 4e^{-2} & (x < 2) \end{aligned}$$

であることが分かる。よって、グラフは次図のようになる。



求めるのは図斜線部の面積なので、

$$\begin{aligned} &\int_0^2 xe^{-x} dx + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2e^{-2} \\ &= \int_0^2 x(-e^{-x})' dx + 2e^{-2} \\ &= [-xe^{-x}]_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx + 2e^{-2} \\ &= 1 - e^{-2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1 - e^{-2}$$

3

(1)

$$\begin{aligned}t^3-(t-1)^3&=3t^2-3t+1\\ \Leftrightarrow t^3&=\frac{1}{3}\left\{t^3-(t-1)^3+3t-1\right\}\end{aligned}$$

と変形できるので、

$$\begin{aligned}S_2(n)&=\sum_{t=1}^n t^2\\&=\sum_{t=1}^n \frac{1}{3}\left\{t^3-(t-1)^3+3t-1\right\}\\&=\frac{1}{3}\left[\sum_{t=1}^n \left\{t^3-(t-1)^3\right\}+3\sum_{t=1}^n t-\sum_{t=1}^n 1\right]\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n \left\{t^3-(t-1)^3\right\}&=\left(1^3-0^3\right)+\left(2^3-1^3\right)+\cdots+\left\{\left(n-1\right)^3-(n-2)^3\right\}+\left\{n^3-(n-1)^3\right\}\\&=n^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n t&=S_1(n)\\&=\frac{1}{2}n(n+1)\end{aligned}$$

$$\sum_{t=1}^n 1=n$$

であるから、

$$\begin{aligned}S_2(n)&=\frac{1}{3}\left\{n^3+\frac{3}{2}n(n+1)-n\right\}\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(2)

$$\begin{aligned}t^4-(t-1)^4&=4t^3-6t^2+4t-1\\ \Leftrightarrow t^3&=\frac{1}{4}\left\{t^4-(t-1)^4+6t^2-4t+1\right\}\end{aligned}$$

と変形できるので、

$$\begin{aligned}S_3(n)&=\sum_{t=1}^n t^3\\&=\sum_{t=1}^n \frac{1}{4}\left\{t^4-(t-1)^4+6t^2-4t+1\right\}\\&=\frac{1}{4}\left[\sum_{t=1}^n \left\{t^4-(t-1)^4\right\}+6\sum_{t=1}^n t^2-4\sum_{t=1}^n t+\sum_{t=1}^n 1\right]\end{aligned}$$

となる。ここで、(1)と同様に

$$\sum_{t=1}^n \left\{t^4-(t-1)^4\right\}=n^4$$

$$\sum_{t=1}^n t^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{t=1}^n t=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{t=1}^n 1=n$$

であるから、

$$\begin{aligned}S_3(n)&=\frac{1}{4}\left\{n^4+6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\right\}\\&=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(3)

k が 2 以上の自然数のとき、二項定理より、

$$\begin{aligned}(t-1)^{k+1}&=_{k+1}C_0(-1)^{k+1}+_{k+1}C_1(-1)^k t+_{k+1}C_2(-1)^{k-1} t^2+\\&\quad \cdots+_{{k+1}}C_{k-1}(-1)^2 t^{k-1}+_{{k+1}}C_k(-1)t^k+_{{k+1}}C_{k+1}t^{k+1}\\&=_{k+1}C_0(-1)^{k+1}+_{{k+1}}C_k(-1)t^k+_{{k+1}}C_{k+1}t^{k+1}+\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j+1} _{{k+1}}C_j t^j\\&=(-1)^{k+1}-(k+1)t^k+t^{k+1}+\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j+1} _{{k+1}}C_j t^j\\&=-(-1)^k-(k+1)t^k+t^{k+1}-\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j} _{{k+1}}C_j t^j\end{aligned}$$

と展開できる。よって、

$$\begin{aligned}(k+1)t^k&=t^{k+1}-(t-1)^{k+1}-(-1)^k-\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j} _{{k+1}}C_j t^j\\ \Leftrightarrow t^k&=\frac{1}{k+1}\left\{t^{k+1}-(t-1)^{k+1}-(-1)^k-\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j} _{{k+1}}C_j t^j\right\}\end{aligned}$$

を得る。

$$S_k(n)=\sum_{t=1}^n t^k$$

と表わされるので、

$$\begin{aligned}S_k(n)&=\sum_{t=1}^n t^k\\&=\frac{1}{k+1}\left[\sum_{t=1}^n \left\{t^{k+1}-(t-1)^{k+1}\right\}-\sum_{t=1}^n (-1)^k-\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} _{{k+1}}C_j t^j\right]\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n \left\{t^{k+1}-(t-1)^{k+1}\right\}&=\left(1^{k+1}-0^{k+1}\right)+\left(2^{k+1}-1^{k+1}\right)+\cdots+\left\{\left(n-1\right)^{k+1}-(n-2)^{k+1}\right\}+\left\{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}\right\}\\&=n^{k+1}\end{aligned}$$

$$\sum_{t=1}^n (-1)^k=(-1)^k n$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} _{{k+1}}C_j t^j&=\sum_{j=1}^{k-1} \left\{_{k+1}C_j (-1)^{k-j} \sum_{t=1}^n t^j\right\}\\&=\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} _{{k+1}}C_j S_j(n)\end{aligned}$$

であるから、

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\left\{n^{k+1}-(-1)^k n+\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} _{{k+1}}C_j S_j(n)\right\}$$

となる。

以上より、2 以上の自然数 k に対し、

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\left\{n^{k+1}-(-1)^k n+\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} _{{k+1}}C_j S_j(n)\right\}$$

となることが示された。

(証明終)