

1

(1) $f'(x) = \cos x - 1$ なので,

$$g(x) = (\cos p - 1)(x - p) + (\sin p - p) = (\cos p - 1)x - p \cos p + \sin p.$$

よって,

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= \{(\cos p - 1)x - p \cos p + \sin p\} - (\sin x - x) \\ &= (\cos p)x - p \cos p + \sin p - \sin x. \end{aligned}$$

$$\{g(x) - f(x)\}' = \cos p - \cos x.$$

増減表は,

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$	π
$(g - f)'$	$\cos p - 1$	$-$	0	$+$	$\cos p + 1$
$g - f$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(x) - f(x)$ の最小値は 0 なので, $g(x) \geq f(x)$. (証明終わり)

(2) 最小値は

$$S\left(\frac{k}{2}\right) = k \sin \frac{k}{2} + \cos k - 1, \cdots \text{【答】}$$

2

(1) $a_n - 3 > 0$ を n に関する帰納法で証明する.

[1] $n = 1$ のとき $a_1 - 3 = 4 > 0$ より成立する.

[2] $n = k$ のとき成立を仮定すると, 漸化式より,

$$a_{k+1} - 3 = \frac{a_k - 3}{a_k - 2} > 0. \cdots \textcircled{1}$$

よって, $n = k + 1$ のときも成立する.

[1], [2] より, 全ての自然数 n に対して $a_n - 3 > 0$ が成り立つ.
したがって, 全ての自然数 n に対して $a_n > 3$. (証明終わり)

(2) 関係式は,

$$b_{n+1} = 1 + b_n. \cdots \text{〔答〕}$$

$$(3) \quad a_n = 3 + \frac{4}{4n - 3}. \cdots \text{〔答〕}$$

3

$$(1) \quad (x, y) = (0, 1), \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right), \dots \text{〔答〕}$$

$$(2) \quad \text{最大値は } \frac{2}{5}. \quad \left((x, y) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \text{ のとき.}\right)$$

$$\text{最小値は } -\frac{2}{3}. \quad \left((x, y) = \left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right) \text{ のとき.}\right) \dots \text{〔答〕}$$