

1

(1)	ア	1	イ	6	ウ	1	エ	2
(2)	オ	0	カ	4	キ	5	ク	3
	ケ	5	コ	6	サ	5		

〔解説〕

(1)

与式を変形すると,

$$(\log_2 x + 1)^2 - 8\log_2 x + \frac{12}{\log_2 x} + 4 = 0$$

となる。ここで $\log_2 x = X$ とおくと,

$$(X + 1)^2 - 8X + \frac{12}{X} + 4 = 0$$

$$X^3 - 6X^2 + 5X + 12 = 0$$

$$(X + 1)(X - 4)(X - 3) = 0$$

$$\therefore X = -1, 3, 4$$

となる。 $\log_2 x = X$ の関係から x を求めると, それぞれ

$$x = \frac{1}{2}, 8, 16$$

となる。よって最も大きい値は16, 最も小さい値は $\frac{1}{2}$ である。

(2)

A, B, C は半径1の円周上の点なので,

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$$

である。また, $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ より,

$$3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = -5\overrightarrow{OC} \quad \dots\dots ①$$

$$4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{OA} \quad \dots\dots ②$$

$$5\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OA} = -4\overrightarrow{OB} \quad \dots\dots ③$$

①の両辺を2乗して,

$$9|\overrightarrow{OA}|^2 + 24\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 16|\overrightarrow{OB}|^2 = 25|\overrightarrow{OC}|^2$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

②の両辺を2乗して,

$$16|\overrightarrow{OB}|^2 + 40\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 25|\overrightarrow{OC}|^2 = 9|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$\therefore \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{4}{5}$$

③の両辺を2乗して,

$$25|\overrightarrow{OC}|^2 + 30\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} + 9|\overrightarrow{OA}|^2 = 16|\overrightarrow{OB}|^2$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = -\frac{3}{5}$$

以上から, $\angle AOB$ は直角であり, $\angle BOC, \angle COA$ は鈍角であるから, $\triangle ABC$ は鋭角三角形である。このとき,

$$\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

であるから, $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$ をそれぞれ求めて足せばよい。

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} = \frac{1}{2}$$

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2 |\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC})^2} = \frac{3}{10}$$

$$\triangle OCA = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OC}|^2 |\overrightarrow{OA}|^2 - (\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA})^2} = \frac{2}{5}$$

よって $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

である。

(1)

行列 X の行列式は

$$(\text{行列式}) = 1 - st \neq 0 \quad (\because s \geq 0, t \leq 0)$$

である。よって逆行列が存在し、

$$X^{-1} = \frac{1}{1-st} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{1-st} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

与式の両辺に行列 X を左からかけると、

$$AX = XY$$

となる。両辺をそれぞれ計算すると、

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ t & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+2t & 2s+2 \\ 2-t & 2s-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XY &= \begin{pmatrix} 1 & s \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u & sv \\ ut & v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。これらの各成分が等しいことから、次の等式が成り立つ。

$$2+2t=u \quad \dots\dots ①$$

$$2-t=ut \quad \dots\dots ②$$

$$2s+2=sv \quad \dots\dots ③$$

$$2s-1=v \quad \dots\dots ④$$

①, ②より、 u を消去すると、

$$\begin{aligned} 2t^2+3t-2 &= 0 \\ (2t-1)(t+2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $t \leq 0$ より、

$$t = -2$$

である。このとき $u = -2$ である。③, ④より、 v を消去すると、

$$\begin{aligned} 2s^2-3s-2 &= 0 \\ (2s+1)(s-2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $s \geq 0$ より、

$$s = 2$$

である。このとき $v = 3$ である。

$$(\text{答}) \quad s=2, t=-2, u=-2, v=3$$

(3)

 $X^{-1}AX=Y$ の両辺を n 乗すると、

$$X^{-1}A^nX=Y^n=\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

となる。この両辺に左から X 、右から X^{-1} をかけると、

$$\begin{aligned} A^n &= X \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} X^{-1} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-2)^n & 2 \cdot 3^n \\ (-2)^{n+1} & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-2)^n + 4 \cdot 3^n & (-2)^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ (-2)^{n+1} + 2 \cdot 3^n & (-2)^{n+2} + 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、各成分は次のようになる。

$$a_n = \frac{1}{5} \left((-2)^n + 4 \cdot 3^n \right)$$

$$b_n = \frac{1}{5} \left((-2)^{n+1} + 2 \cdot 3^n \right)$$

$$c_n = \frac{1}{5} \left((-2)^{n+1} + 2 \cdot 3^n \right)$$

$$d_n = \frac{1}{5} \left((-2)^{n+2} + 3^n \right)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{5} \left((-2)^n + 4 \cdot 3^n \right) \\ b_n &= \frac{1}{5} \left((-2)^{n+1} + 2 \cdot 3^n \right) \\ c_n &= \frac{1}{5} \left((-2)^{n+1} + 2 \cdot 3^n \right) \\ d_n &= \frac{1}{5} \left((-2)^{n+2} + 3^n \right) \end{aligned}$$

(答)

(1)

アメ玉をちょうど k 個とリンゴ1個をもらうのは、 $a=k$ のときである。よって、アメ玉をちょうど k 個とリンゴ1個をもらう確率は、

$$p_k = \frac{1}{11}$$

となる。ただし、 $r < k$ とする。

$$(\text{答}) \quad p_k = \frac{1}{11}$$

(2)

アメ玉をちょうど k 個とミカン1個をもらうのは、 $a \leq r$ かつ $b=k$ となるときである。よって、アメ玉をちょうど k 個とミカン1個をもらう確率は、

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{r}{11} \cdot \frac{1}{11} \\ &= \frac{r}{121} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q_k = \frac{r}{121}$$

(3)

与式に(1), (2)で得られた結果を代入すると、

$$\begin{aligned} E_r &= \sum_{k=r+1}^{11} \frac{k}{11} + \sum_{k=1}^{11} \frac{kr}{121} \\ &= \frac{1}{11} \cdot \frac{\{(r+1)+11\}(11-r)}{2} + \frac{r}{121} \cdot \frac{(1+11) \times 11}{2} \\ &= \frac{(r+12)(11-r)}{22} + \frac{6r}{11} \\ &= \frac{1}{22}(-r^2 + 11r + 132) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad E_r = \frac{1}{22}(-r^2 + 11r + 132)$$

(4)

(3)の結果より、

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{22}(-r^2 + 11r + 132) \\ &= -\frac{1}{22} \left\{ \left(r - \frac{11}{2} \right)^2 - \frac{649}{4} \right\} \end{aligned}$$

となる。 r は整数なので、 $r=5, 6$ のとき E_r は最大となり、その値は

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{22}(-5^2 + 11 \cdot 5 + 132) \\ &= \frac{81}{11} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r=5, 6 \text{ のとき, } E_r = \frac{81}{11}$$