

L 2 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入
しなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものが採点されます。
- (4) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (5) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 **1** の解答は **1** の解答用紙に記入せよ。

1 次の (1) から (4) の問題について、答のみを簡単な形に整理して解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(50 点)

(1) xy 平面において、点 A は曲線 $y = \frac{1}{x}$ の $x > 0$ の部分を動き、点 B は曲線 $y = \frac{1}{x}$ の $x < 0$ の部分を動くものとする。点 A の x 座標を a 、点 B の x 座標を b とするとき、次の問いに答えよ。

(a) 点 A を固定したとき、点 A と点 B の距離が最小となるような b を、 a を用いて表せ。

(b) (a) で求めた b に対して、 $a - b$ はある a で最小値 m をとる。その最小値をとるときの a の値を求めよ。

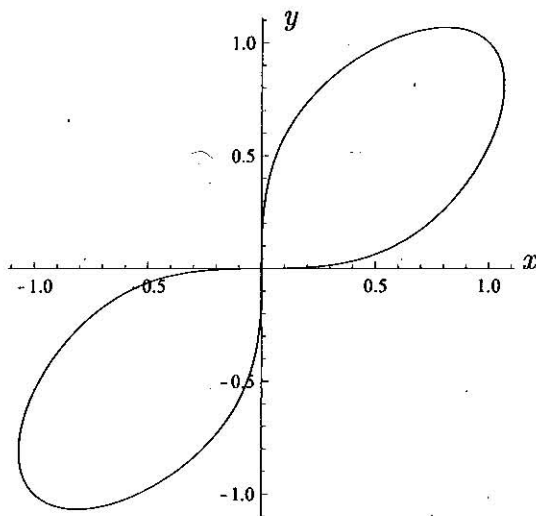
(c) (b) における m に対して、 m^4 が有理数かどうかを判定し、無理数ならば解答欄に「無理数」と記入し、有理数ならばそれを既約分数の形で解答欄に記入せよ。

右のページは白紙です。

(2) xy 平面において、 $x^4 + y^4 = 2xy$ を満たす点 (x, y) の全体は下の図のような曲線 C となる。

(a) 曲線 C 上の $(0, 0)$ 以外の点 (x, y) の極座標を (r, θ) とするとき、 r^2 を $\sin 2\theta$ の式で表せ。

(b) 点 (x, y) が曲線 C 上を動くときの $(x - y)^2$ の最大値を求めよ。ただし、最大値を与える x, y の値を答える必要はない。



右のページは白紙です。

- (3) n を自然数とし、 ℓ を n 以下の自然数とするとき、次の問いに答えよ。なお、以下において $k = 0$ のときの $(1+x)^k$ と x^k は定数 1 を表すものとする。

(a) $\sum_{k=0}^n (1+x)^k$ を x の多項式として整理したときの x^ℓ の係数を、ただ一つの二項係数を含む式で表せ。

(b) $\sum_{k=0}^n x^{n-k}(1+x)^k$ を x の多項式として整理したときの x^ℓ の係数を、ただ一つの二項係数を含む式で表せ。

右のページは白紙です。

(4) 次の問いに答えよ。ただし、 $\log x$ は x の自然対数を表す。

(a) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \log \left(\frac{n+k}{n} \right)$$

(b) 次の積分の値を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+x+1} dx$$

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は **2** の解答用紙の所定の欄に記入せよ。答えを導く過程も記すこと。**2** の解答用紙は 2 枚あるので注意せよ。

2 xy 平面における放物線 $y = x^2$ を C とする。また、実数 a, b に対して定まる放物線 $x = (y - a)^2 + b$ を $C_{a,b}$ とする。このとき次の性質 (*) を持つような数 A がただ一つ定まる。

$$(*) \quad \begin{cases} 0 < a < A \text{ ならばすべての実数 } b \text{ に対して } C \text{ と } C_{a,b} \text{ の共有点は 2 個以下,} \\ a > A \text{ ならばある実数 } b \text{ に対して } C \text{ と } C_{a,b} \text{ の共有点は 3 個以上となる。} \end{cases}$$

一般に、 C と $C_{a,b}$ の共有点の x 座標は方程式 $x = (x^2 - a)^2 + b$ の解であることに注意し、次のように考察を進めて A を求めよ。ただし一般に関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ で表す。 (50 点)

(1) $a > 0$ として、 x の関数 $y = (x^2 - a)^2$ のグラフの概形を描け。

(2) $a > 0$ 、 b は実数として $g(x) = (x^2 - a)^2 + b - x$ とおく。このとき、 $y = g'(x)$ のグラフの概形を、 x が $\pm\sqrt{a}$ および 0 のときの値に注意しながら、 $g'(x) = 0$ をみたす実数 x の個数が 1 個と 3 個の場合に分けて描け。ただし、 $g'(x) = 0$ をみたす実数 x は必ず存在するので、そのうちの最大のものを x_1 として、グラフにその位置を記入せよ (x_1 を具体的な式で表示する必要はない)。

(3) $a > 0$ として $f(x) = (x^2 - a)^2$ とおく。このとき、 $-\sqrt{a} < x_0 < 0$ をみたすある x_0 において $f'(x_0) > 1$ となるならば、 xy 平面において、直線 $y = x - x_0 + f(x_0)$ と曲線 $y = f(x)$ は $x_0 < x < \sqrt{a}$ の範囲に必ず共有点を持つことを証明せよ。(ヒント：関数 $h(x) = f(x) - \{x - x_0 + f(x_0)\} = (x^2 - a)^2 + \{x_0 - f(x_0)\} - x$ を考える。)

(4) A を求めよ。また、その A が性質 (*) を持つことを証明せよ。

右のページは白紙です。