

N 1

数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 6 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H B または B)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしなさい。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 **1** の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の (1) から (3) において、 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートにマークせよ。なお、同一の問題文中に **ア** などが 2 度以上現れる場合、2 度目以降は、**ア** のように網掛けで表記する。
(35 点)

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(a) $A^2 = \text{ア} A - \text{イ} E$ である。

(b) $(A - sE)^2 = tA$ をみたす実数 s, t は $s = \text{ウ}$, $t = \text{エ}$ または $s = -\text{ウ}$, $t = \text{オ}$ である。

(c) $p = \text{カ}$, $q = \text{キ}$, $r = \text{ク}$ のとき, $p \geq 0$, $pq - r^2 \geq 0$ であり, また $\begin{pmatrix} p & r \\ r & q \end{pmatrix}^2 = A$ が成り立つ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(2) $S(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a \cos x - \sin x| dx$ ($a > 0$) とするとき,

$$S(\sqrt{3}) = \boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$$

であり, 一般に

$$S(a) = \sqrt{\boxed{\text{サ}} a^2 + \boxed{\text{シ}}} - (\boxed{\text{ス}} a + \boxed{\text{セ}})$$

となる。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(3) 関数 $f(x)$ ($x > 0$) を

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(7x+6)^n + (9x)^n}$$

により定める。「正の実数 a に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ 」ということなどから、

$0 < x \leq \boxed{\text{ソ}}$ のときは $f(x) = \boxed{\text{タ}}x + \boxed{\text{チ}}$ であり、 $x > \boxed{\text{ソ}}$ のときは

$f(x) = \boxed{\text{ツ}}x + \boxed{\text{テ}}$ であることがわかる。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 2つの数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を以下のように定める。

- $x_1 = 0, y_1 = 5$
- すべての自然数 n に対して,

$$|x_n + y_n| \leq 2\sqrt{2} \text{ ならば } x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, y_{n+1} = y_n$$

$$|x_n + y_n| > 2\sqrt{2} \text{ ならば } x_{n+1} = x_n, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

このとき次の問いに答えよ。

(30 点)

- (1) $y_n - x_n$ を n の式で表せ。
- (2) すべての自然数 n に対して $x_n^2 \leq 2 < y_n^2$ となることを、数学的帰納法によって証明せよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

3 図のように、座標平面上で半径 r ($0 < r < 1$) の円 C_1 が、原点 O を中心とする半径 1 の円 C_2 に内接しながらすべらずにころがる。ただし円 C_1 の中心 C は原点のまわりを反時計まわりに動くものとする。このとき、円 C_1 の周上に固定された点 A が描く曲線を考えよう。最初に点 A は点 $B(1, 0)$ の位置にあるものとする。

円 C_1, C_2 の接点を M とする。このとき点 M は円 C_1 の周上を半直線 CA を基準として反時計まわりに動く。この動径 CM の始線 CA からの回転角を s とする。また点 M は円 C_2 の周上を反時計まわりに動く。この動径 OM の始線 OB からの回転角を t とする。次の問いに答えよ。 (35 点)

(1) $\overrightarrow{CM} = (p, q)$ とするとき、 $\overrightarrow{CA}$ を p, q, s を用いて成分で表せ。

(2) $\overrightarrow{OA}$ を r, t を用いて成分で表せ。

(3) $r = \frac{1}{2}$ とする。点 A が点 B の位置に初めて戻るまでに描く曲線の概形を図示せよ。

(4) $r = \frac{1}{4}$ とする。点 A が点 B の位置に初めて戻るまでに描く曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

