

D 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 4 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用マークシートに受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用マークシートにマークしたものが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしなさい。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 ~ 4 の各文章中の ア, イ, ウ, ... に当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。根号の中は、4 でも 9 でも割り切れないものとします。なお、ア は既出の ア を表します。

1 関数 $f(x)$ を $f(x) = |x^2 - x| + 1$ とする。

(1) (i) 方程式 $\log_3 f(x) = 1$ の実数解は $x = -\text{ア}$, イ である。

(ii) 方程式 $f(\log_3 x) = 3$ の実数解は $x = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$, オ である。

(2) 方程式 $f(x) = a$ が区間 $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{3}$ に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲は

$$\frac{\text{カキ}}{\text{クケ}} \leq a \leq \frac{\text{コサ}}{\text{シ}}$$

である。また、この方程式が区間 $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{2}{3}$ に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲は

$$\frac{\text{スセ}}{\text{ソタ}} \leq a \leq \frac{\text{チ}}{\text{ツ}}$$

である。

(3) 方程式 $f(x) = f(b)$ が区間 $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{2}{3}$ に少なくとも 1 つの実数解をもつような正の定数 b の値の範囲は

$$\frac{\text{テ}}{\text{ト}} \leq b \leq \frac{\text{ナ}}{\text{ニ}}, \quad \frac{1}{4}(\text{ヌ} + \sqrt{\text{ネ}}) \leq b \leq \frac{1}{2}(\text{ノ} + \sqrt{\text{ハ}})$$

である。

(25 点)

右のページは白紙です。

2

空間内に四面体 OABC があり

$$OA = 2, OB = 3, OC = 1, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 5, \angle AOC = \angle BOC$$

であるという。ただし、記号 $\cdot$ は内積を表す。

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \cos \angle AOC = t \text{ とおく。}$$

(1) 三角形 OAB の面積は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \sqrt{\boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) ベクトル $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}$ が $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直であるような実数 x, y の値を t を用いて表すと

$$x = -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}} \boxed{\text{キ}}} t, \quad y = -\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}} \boxed{\text{コ}}} t$$

である。このとき

$$\vec{p} \cdot \vec{c} = -\frac{\boxed{\text{サ}} \boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}} \boxed{\text{セ}}} t^2 + \boxed{\text{ソ}}$$

となる。

(3) 四面体 OABC の体積 V を t を用いて表すと

$$V = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}} \boxed{\text{テ}} - \boxed{\text{ト}} \boxed{\text{ナ}} t^2}$$

となる。

(25 点)

右のページは白紙です。

3

コインを6枚持っているA君と、コインをたくさん持っているB君が、次の(G)を何回か繰り返すゲームを行う。

(G) A君とB君がそれぞれ1個のさいころを投げ、それら二つのさいころの目の和が4の倍数のときはA君がB君からコインを m 枚もらい、4の倍数でないときはB君がA君からコインを2枚もらう。

ただし、 m は自然数である。B君がコインをたくさん持っているとは、A君がB君からコインをもらうべきときに、B君は必要な枚数のコインを必ず持っていることを意味するものとする。

(1) (G)を1回行うとき、A君が持っているコインの枚数の期待値が6より大きくなるのは、 $m \geq$

ア

 のときであり、 $m =$

ア

 のとき、その期待値は

イ	ウ
エ	

 である。

(2) (G)を3回行うとき、A君が6枚より多くのコインを持っている確率が $\frac{1}{2}$ より大きくなるのは、 $m \geq$

オ

 のときであり、 $m =$

オ

 のとき、その確率は

カ	キ
ク	ケ

 である。

(3) (G)を5回行う。ただし、A君が持っているコインの枚数が0になったらその時点でゲームを終了するものとする。また、B君がA君からコインを2枚もらうべきときに、A君が1枚しか持っていない場合は、B君はその1枚だけをもらうものとする。このゲームを行うとき、A君がコインを少なくとも1枚持っている確率は

$m \geq$

コ

 のとき

サ	シ
ス	セ

 $m <$

コ

 のとき

ソ	タ	チ	
ツ	テ	ト	ナ

である。

(25点)

右のページは白紙です。

4

O を原点とする xy 平面において、放物線 $C: y = -(x-a)^2 + k^2$ を考える。

ただし、 k は正の定数とし、 a は

$$-k \leq a \leq k \quad \dots\dots\dots (*)$$

の範囲にある実数とする。そのとき、 C と x 軸の交点のうち x 座標が大きい方を P とし、 C と y 軸の交点を Q とする。

(1) a が $(*)$ の範囲を動くときの、 $OP + OQ$ の最大値 M を k を用いて表すと

$$k \leq \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \text{ の場合は } M = \boxed{\text{ウ}} k, \quad k > \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \text{ の場合は } M = k^2 + k + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

となる。

(2) a が $(*)$ の範囲を動くときの、 $OP \times OQ$ の最大値 N 、および最大値を与える a の値をそれぞれ k を用いて表すと

$$N = \frac{\boxed{\text{カ}} \boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}}} k^{\boxed{\text{コ}}}, \quad a = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} k$$

である。

a が $(*)$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる領域 (境界を含む) を D とし、 D の面積を S とおく。

$$(3) \quad S = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} k^{\boxed{\text{ソ}}} \text{ である。}$$

(4) D に含まれる三角形のうち、面積が最大である三角形の面積を S_0 とおくと

$$\frac{S_0}{S} = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

ただし、点 A, B に対して、 AB は線分 AB の長さを表し、とくに $A = B$ のとき、線分 AB とは点 A のことであって $AB = 0$ であるものとする。

(25 点)

右のページは白紙です。