

# E 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

## 〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用マークシートに受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用マークシートにマークしたものが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
  - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
  - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
  - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしなさい。
  - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

次の 1 から 5 までの問題において、問題文中の   内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートにマークせよ。ただし   は 2 桁の数、  は 3 桁の数を表す。ただし分数における分母と分子は、1 以外の公約数をもたないものとする。また、根号を含む問題では、根号の中に現れる自然数が最小となる形で表すものとする。

1 A, B, C, D を頂点とする四面体において、 $\triangle ACD$  の重心を  $G_1$ 、 $\triangle BCD$  の重心を  $G_2$  とする。このとき次が成り立つ。

(1)  $\frac{G_1G_2}{AB} = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$  である。

(2) また、E は線分 AC を  $AE : EC = 2 : 1$  に内分する点とし、点 B, D, E を通る平面と線分  $G_1G_2$  の交点を F とする。このとき  $\frac{FG_2}{G_1F} = \text{ウ}$  である。

(3) さらに  $AB = 4$ ,  $AC = 4$  かつ  $\angle BAC$  と  $\angle BAD$  および  $\angle BFE$  がすべて直角とすると  $AD = \text{エ}$  である。

(20 点)

右のページは白紙です。

**2** $a$  を実数の定数として、 $x$  の関数

$$f(x) = (x - 2a - 2)(x^2 + 2ax - 5a^3 - 4)$$

を考える。このとき、 $f(x)$  の導関数を  $f'(x)$  として、 $x$  についての方程式  $f(x) = 0$  と  $f'(x) = 0$  が共通の解をもつような  $a$  の値は **オ** 個あり、そのうち整数は **カ** 個ある。

(10 点)

右のページは白紙です。

3

$t$  は正の実数とする。 $xy$  平面において、放物線

$$C_1: y = x^2$$

と、 $C_1$  上の 2 点  $\left(-\frac{4}{t}, \frac{16}{t^2}\right), \left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{4}\right)$  をそれぞれ頂点とする 2 つの放物線

$$C_2: y = \left(x + \frac{4}{t}\right)^2 + \frac{16}{t^2},$$

$$C_3: y = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4}$$

がある。 $C_2$  と  $C_3$  の交点の座標は

$$\left( \frac{t}{\boxed{\text{キ}}} - \frac{\boxed{\text{ク}}}{t}, \frac{t^2}{\boxed{\text{ケ}}} + \frac{\boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}}}{t^2} \right)$$

であり、 $C_1, C_2, C_3$  で囲まれる部分の面積  $S(t)$  は

$$S(t) = t + \frac{\boxed{\text{シ}}}{t}$$

である。 $t$  が  $t > 0$  の範囲を動くときの  $S(t)$  の最小値は、 $\boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}}$  である。

また、 $t = 4$  のとき、 $C_2, C_3$  の共通接線と  $C_1$  で囲まれる部分の面積は  $\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \sqrt{\boxed{\text{チ}}}$  である。

(25 点)

右のページは白紙です。

4

 $a$  は定数として、 $\theta$  に関する方程式

$$\sin 3\theta - 3\sin \theta + a\cos^2 \theta - 5 = 0 \quad \dots\dots ①$$

について考える。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$  とする。

(1)  $\sin \theta = x$  とおくと、方程式 ① は  $x$  に関する 3 次方程式

$$\boxed{\text{ツ}} x^3 + ax^2 - a + \boxed{\text{テ}} = 0 \quad \dots\dots ②$$

に書きかえられる。ただし、 $-1 \leq x \leq 1$  である。

(2) ② の左辺を  $f(x)$  とおくと、 $-6 < a < 0$  ならば、 $-1 \leq x \leq 1$  の範囲では、

$$f(x) \text{ は } x = -\frac{a}{\boxed{\text{ト}}} \text{ のとき極小値 } \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}} \boxed{\text{ヌ}} \boxed{\text{ネ}}} a^3 - a + \boxed{\text{ノ}} \text{ をとる。}$$

(3) 定数  $a$  の値に応じて、方程式 ② の  $-1 \leq x \leq 1$  における異なる実数解の個数は

$$a < \boxed{\text{ハ}} \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

$$a = \boxed{\text{ハ}} \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$a > \boxed{\text{ハ}} \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

であることがわかる。したがって、方程式 ① の  $0 \leq \theta < 2\pi$  における解の個数は

$$a < \boxed{\text{ハ}} \text{ のとき } \boxed{\text{ヒ}} \text{ 個}$$

$$a = \boxed{\text{ハ}} \text{ のとき } \boxed{\text{フ}} \text{ 個}$$

$$a > \boxed{\text{ハ}} \text{ のとき } \boxed{\text{ヘ}} \text{ 個}$$

である。

(25 点)

右のページは白紙です。

5

$n$  を自然数として、正方形を縦と横にそれぞれ  $n$  等分して  $n^2$  個の小正方形に分けたものを考える。このとき、次の 3 条件を満たすように  $n^2$  個の小正方形のそれぞれに 0 か 1 を書き入れることを考える（下図は  $n = 5$  の場合の例である）。

（条件 1）各行（横の並び）の  $n$  個の小正方形に記された数のうちちょうど一つが 1

（条件 2）各列（縦の並び）の  $n$  個の小正方形に記された数のうちちょうど一つが 1

（条件 3）0, 1 の配置は、大きな正方形の左上から右下に向かう対角線に関して対称

これらの条件を満たす 0, 1 の書き入れ方の総数は、 $n = 3$  から  $n = 7$  までの各場合について次のとおりである。

$n = 3$  のとき 

|   |
|---|
| ホ |
|---|

 通り

$n = 4$  のとき 

|   |   |
|---|---|
| マ | ミ |
|---|---|

 通り

$n = 5$  のとき 

|   |   |
|---|---|
| ム | メ |
|---|---|

 通り

$n = 6$  のとき 

|   |   |
|---|---|
| モ | ヤ |
|---|---|

 通り

$n = 7$  のとき 

|   |   |   |
|---|---|---|
| ユ | ヨ | ラ |
|---|---|---|

 通り

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

(20 点)