

1 次の文章中の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ハ}}$ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。なお、 $\boxed{\text{ア}}$ は既出の $\boxed{\text{ア}}$ を表します。

(40 点)

(1) 最高次の係数が 8 の 3 次多項式 $P(x)$ が

$$P(0) = -4, \quad P(1) = 5, \quad P'(1) = 16$$

を満たすとする。ここで、 $P'(1)$ は $P(x)$ の $x = 1$ における微分係数を表す。多項式 $P(x) - a(x - 1) - bx$ が多項式 $x(x - 1)$ で割り切れるように定数 a, b を定めると

$$a = \boxed{\text{ア}}, \quad b = \boxed{\text{イ}}$$

であり、このとき、その商を $Q(x)$ とすると

$$P(x) = x(x - 1)Q(x) + \boxed{\text{ア}}(x - 1) + \boxed{\text{イ}}x$$

と表される。この両辺を微分すると

$$P'(x) = (x - 1)Q(x) + xQ(x) + x(x - 1)Q'(x) + \boxed{\text{ウ}}$$

となる。したがって、 $Q(x)$ は

$$Q(1) = \boxed{\text{エ}}$$

を満たし、 $P(x)$ は最高次の係数が 8 の 3 次式なので、

$$P(x) = \boxed{\text{オ}}x(x - 1)^2 + \boxed{\text{カ}}x(x - 1) + \boxed{\text{ア}}(x - 1) + \boxed{\text{イ}}x$$

と表される。

2

座標平面において、2つの放物線 $y = x^2$ と $y = 2x^2$ を考える。正の実数 t に対し、放物線 $y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における法線を ℓ とする。直線 ℓ と放物線 $y = 2x^2$ の交点を P_1, P_2 とし、線分 P_1P_2 の中点を Q とする。

- (1) 直線 ℓ の方程式を求めなさい。
- (2) 点 Q の x 座標を求めなさい。
- (3) t が正の範囲を動くとき、点 Q の y 座標の最小値と、それを与える t の値を求めなさい。

3

各自然数 n に対して、 t の関数 $J_n(t)$ を

$$J_n(t) = \int_t^{t + \frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

と定める。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) $J_n(t)$ の導関数 $J_n'(t)$ を、 $\sin t$ と $\cos t$ を用いて表しなさい。
- (2) $J_n(t + \pi) = (-1)^n J_n(t)$ を、置換積分法を用いて示しなさい。
- (3) $n = 2$ のとき、 $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で、 $J_2(t)$ の最大値と最小値、および、それらを与える t の値を、それぞれ求めなさい。
- (4) $n = 3$ のとき、 $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で、 $J_3(t)$ の最大値と最小値、および、それらを与える t の値を、それぞれ求めなさい。