

# G 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 4 ページまであります。

## 〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
  - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
  - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
  - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしなさい。
  - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ユ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点)

(1) 座標空間の 6 つの点

$$O(0, 0, 0), \quad A(1, 0, 0), \quad B(0, 2, 0), \quad C(0, 0, 3), \quad D(1, 2, 0), \quad P(0, 0, t)$$

を考える。ただし、 $0 \leq t \leq 3$  である。

(i)  $DP^2 = t^2 + \text{ア}$  である。また  $\cos \angle ODP = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{94}}$  なら、 $t = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}}$  である。

(ii)  $\triangle ABC$  の重心  $G$  の座標は  $\left( \frac{\text{エ}}{\text{オ}}, \frac{\text{カ}}{\text{キ}}, \text{ク} \right)$  である。また  $\triangle ABC$  と線分  $DP$  の交点が重心  $G$  と等しいなら、 $t = \frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$  である。

右のページは白紙です。

- (2) 関数  $f(x) = e^{3x} \sin 4x$  の極値を  $x > 0$  の範囲で考える。ここで、 $e$  は自然対数の底である。

- (i) 関数  $y = f(x)$  は、各自然数  $n$  に対して、 $\theta_n = \frac{n\pi - \alpha}{\boxed{\text{サ}}_2}$  で極値をとる。

ここで、 $\alpha$  は  $0 < \alpha < \pi$  の範囲にあり、

$$\cos \alpha = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}, \quad \sin \alpha = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

を満たす。

- (ii) (i) において、 $x = \theta_n$  のときの極値  $y_n$  は  $y_n = (-1)^{n-1} \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} e^{3\theta_n}$  である。

- (iii) (ii) で求めた  $y_n$  について、 $\frac{y_{2n+1}}{y_{2n-1}}$  は一定で、その値を  $e^{C\pi}$  と表すと、

$$C = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \text{ である。}$$

- (3) 座標平面上、2 曲線  $y = x^2$ ,  $y = x^3 - x$  の交点は原点以外に 2 点あり、その  $x$  座標を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とすると、

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ト}} - \sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}, \quad \beta = \frac{\boxed{\text{ヌ}} + \sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}$$

である。またこの 2 曲線で囲まれた部分は 2 つあり、そのうち、 $x \leq 0$  の部分の面積を  $S$ ,  $x \geq 0$  の部分の面積を  $T$  とすると、

$$S = \frac{\boxed{\text{ハ}} \boxed{\text{ヒ}} - \boxed{\text{フ}} \sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}} \boxed{\text{マ}}}, \quad T = \frac{\boxed{\text{ミ}} \boxed{\text{ム}} + \boxed{\text{メ}} \sqrt{\boxed{\text{モ}}}}{\boxed{\text{ヤ}} \boxed{\text{ユ}}}$$

となる。

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

**2** 行列  $A, B, E$  を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

として、 $A$  は逆行列をもたないとする。

(1)  $A^2$  を求めなさい。

以下では、 $AB + BA = E$  が成り立つとする。

(2)  $x$  の値を求めなさい。

(3)  $ABA = A$  を示しなさい。

(4) 2 以上の自然数  $n$  に対し、 $(AB)^n + (BA)^n$  を求めなさい。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 3 の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 次の問いに答えなさい。

(1) 0 以上の整数  $m, n = 0, 1, 2, \dots$  に対し,  $I(m, n)$  を

$$I(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$$

で定める。

(i)  $m \geq 1$  のとき, 部分積分法を用いて,

$$I(m, n) = \frac{m}{n+1} \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n+1} dx$$

が成り立つことを示しなさい。

(ii)  $I(m, n) = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$  を示しなさい。

(2)  $f(x)$  を区間  $[0, 1]$  で定義された連続関数とする。自然数  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し, 多項式  $P_n(x)$  を

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n {}_nC_k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

で定める。ここで,  ${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  である。このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 P_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

となることを示しなさい。

(30 点)

右のページは白紙です。