

1

【解答】

- (1) ア 1 イ 2
(2) ウ 1 エ 3
(3) オ 5 カ 3 キ 6
(4) ク 2 ケ 2 コ 7

【解説】

サイコロを投げたとき、各目の出方は同様に確からしいとする。

(1)

$$\begin{aligned}n &= a \times 10^2 + b \times 10 + c \\ &= 2 \times (a \times 50 + b \times 5) + c\end{aligned}$$

より、 n が奇数になるのは、 c が奇数であるときであり、このようになる確率は $\frac{1}{2}$ である。

(2)

$a+b$ を3で割った余りを r ($r=0, 1, 2$)とおくと、 $a+b+c$ が3で割り切れるような c の値はいずれの r の値に対しても $c=3-r, 6-r$ の2通りあるから、このようになる確率は

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

である。

(3)

$2a$ は7の倍数になりえない。また、 $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$ に対して $3b$ を7で割った余りはそれぞれ3, 6, 2, 5, 1, 4となり、1から6の値が1回ずつ現れる。よって、ある a の値に対して $2a+3b$ は $\frac{1}{6}$ の確率で7の倍数となる。さらに、 $c=1, 2, 3, 4, 5, 6$ に対して c を7で割った余りは1から

6の値が1回ずつ現れるから、 $2a+3b+c$ が7の倍数となるのは、 $2a+3b$ が7の倍数でなく、 $2a+3b$ を7で割った余りに c を加えて7となる場合であり、このようになる c の値はただ1つ存在する。よって、 $2a+3b+c$ が7の倍数となる確率は

$$\left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

である。

(4)

$$\begin{aligned}n &= 10^2 a + 10b + c \\ &= a - b + c + 11(9a + b)\end{aligned}$$

より、 n が11で割り切れるのは $a-b+c$ が11で割り切れるときである。ここで、 $-4 \leq a-b+c \leq 11$ であるから、 $a-b+c$ が11で割り切れるとき $a-b+c=0, 11$ のいずれかである。

[1] $a-b+c=0$ のとき

$a+c \geq 2$ より、 $b=1$ のとき $a-b+c=0$ は満たさない。 $a-b+c=0$ を満たす (a, c) の値の組は、 $b=2, 3, 4, 5, 6$ である b に対して $(a, c)=(1, b-1), (2, b-2), \dots, (b-1, 1)$ の $b-1$ 通りあるから、 $a-b+c=0$ を満たす (a, b, c) の値の組は全部で

$$\sum_{b=2}^6 (b-1) = 15 \text{通り}$$

である。

[2] $a-b+c=11$ のとき

$a-b+c=11$ を満たす (a, b, c) の値の組は $(a, b, c)=(6, 1, 6)$ の1通りである。

以上、[1], [2]より、 n が11で割り切れる確率は

$$\frac{15+1}{6^3} = \frac{2}{27}$$

である。

2

(1)

(a)

$$f(x)=x^2 \text{とおくと}$$
$$f'(x)=2x$$

であるから、放物線 $C:y=f(x)$ 上の点 $P(a, a^2)$ における法線 l の方程式は

$$y=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2 \quad (\because a>0)$$
$$=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$$

である。

$$\text{(答)} \quad y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$$

(b)

l と C の交点の x 座標は

$$-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}=x^2$$
$$\Leftrightarrow 2ax^2+x-2a^3-a=0$$
$$\Leftrightarrow (x-a)(2ax+2a^2+1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=a, -a-\frac{1}{2a}$$

となり、点 Q の x 座標はこのうち点 P の x 座標 a とは異なる値であるから $-a-\frac{1}{2a}$ である。

$$\text{(答)} \quad -a-\frac{1}{2a}$$

(c)

l の傾きは $-\frac{1}{2a}$ であるから、 l 上にある x 座標が α, β ($\alpha<\beta$) である 2 点の間の距離の 2 乗は

$$(\beta-\alpha)^2+\left\{-\frac{1}{2a}(\beta-\alpha)\right\}^2=\frac{4a^2+1}{4a^2}(\beta-\alpha)^2$$

となる。よって、線分 PQ の長さの 2 乗は

$$PQ^2=\frac{4a^2+1}{4a^2}\left\{a-\left(-a-\frac{1}{2a}\right)\right\}^2$$
$$=\frac{4a^2+1}{4a^2}\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^2$$
$$=\frac{(4a^2+1)^3}{16a^4}$$

であり、 $t=4a^2$ とおくと、 $t>0$ のもとで

$$PQ^2=\frac{(t+1)^3}{t^2}$$

となる。よって、 $g(t)=\frac{(t+1)^3}{t^2}$ とおくと

$$g'(t)=\frac{3(t+1)^2 \cdot t^2 - (t+1)^3 \cdot 2t}{t^4}$$
$$=\frac{(t+1)^2(t-2)}{t^3}$$

となり、 $g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	2	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって、 $g(t)(=PQ^2)$ は $t=2$ のとき最小となり、 $PQ>0$ より、このとき PQ も最小となるから、

求める a の値は

$$t=2$$
$$\Leftrightarrow 4a^2=2$$
$$\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because a>0)$$

である。

$$\text{(答)} \quad a=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2)

(a)

放物線 C 上の点 R の x 座標を r ($r \neq a$) とおく。

[1] $r=0$ のとき

法線 l_R の方程式は $l_R:x=0$ となるが、このとき C, l_R は原点以外に交点をもたず、 l_R が C 上の点である P を通ることはない。

[2] $r \neq 0$ のとき

(1)(a)の結果を用いて

$$l_R:y=-\frac{1}{2r}x+r^2+\frac{1}{2}$$

となる。これが点 P を通るとき

$$a^2=-\frac{1}{2r} \cdot a+r^2+\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow (r-a)\left(r+\frac{1}{2r}+a\right)=0$$
$$\Leftrightarrow a=-r-\frac{1}{2r} \quad (\because r \neq a)$$
$$\Leftrightarrow 2r^2+2ar+1=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。このような R が 2 個あるとき、 $\textcircled{1}$ を満たす r の値が $0, a$ 以外に 2 個存在する。

ここで、 $h(r)=2r^2+2ar+1$ とおくと

$$h(0)=1>0$$
$$h(a)=4a^2+1>0$$

となるから $r=0, a$ は $\textcircled{1}$ を満たさない。よって、 $\textcircled{1}$ を満たす r の値が a 以外に 2 個存在するとき、 $\textcircled{1}$ を r の 2 次方程式とみて、この判別式を D とするとき

$$D>0$$
$$\Leftrightarrow a^2-2>0$$
$$\Leftrightarrow a>\sqrt{2} \quad (\because a>0)$$

となる。

以上、[1], [2]より、求める a の条件は

$$a>\sqrt{2}$$

である。

$$\text{(答)} \quad a>\sqrt{2}$$

(b)

点 R_1, R_2 の x 座標をそれぞれ r_1, r_2 ($r_1<r_2$) とおくと、 r_1, r_2 は 2 次方程式 $\textcircled{1}$ の 2 実数解であるから、解と係数の関係より

$$r_1+r_2=-a \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$r_1r_2=\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。ここで

$$\overrightarrow{PR_1}=(r_1-a, r_1^2-a^2), \overrightarrow{PR_2}=(r_2-a, r_2^2-a^2)$$

であるから、 $\triangle PR_1R_2$ の面積を S とおくと

$$S=\frac{1}{2}\left|(r_1-a)(r_2^2-a^2)-(r_2-a)(r_1^2-a^2)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|r_1r_2(r_2-r_1)+a^2(r_2-r_1)-a(r_2-r_1)(r_2+r_1)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|(r_2-r_1)\{r_1r_2+a^2-a(r_2+r_1)\}\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|\sqrt{(r_1+r_2)^2-4r_1r_2}\{r_1r_2+a^2-a(r_2+r_1)\}\right| \quad (\because r_1<r_2)$$
$$=\frac{1}{2}\left|\sqrt{(-a)^2-4 \cdot \frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}+a^2-a \cdot (-a)\right\}\right|$$
$$=\left(a^2+\frac{1}{4}\right)\sqrt{a^2-2}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \left(a^2+\frac{1}{4}\right)\sqrt{a^2-2}$$

3

(1)

曲線 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 上の点の座標は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ である実数 θ を用いて

$(2\sin \theta, \cos \theta)$ とあらわすことができる。この点が $C_2: y = \frac{1}{tx}$ 上に存在するとき

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{1}{t \cdot 2\sin \theta} \\ \Leftrightarrow 2\sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{t} \\ \Leftrightarrow \sin 2\theta &= \frac{1}{t} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、2つの曲線 C_1, C_2 の交点が2つ存在するとき、 $\textcircled{1}$ を満たす実数 θ が2つ存在する。 $0 \leq 2\theta \leq \pi$ であるから、 $\textcircled{1}$ を満たす実数 θ が2つ存在するとき

$$0 \leq \frac{1}{t} < 1$$

$$\Leftrightarrow t > 1$$

となる。

(答) $t > 1$

(2)

(a)

P, Q の x 座標をそれぞれ $2\sin \alpha, 2\sin \beta$ ($0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$) とおくと、P の x 座標が Q の x 座標

より小さいとすると

$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$$

となる。P, Q は C_1, C_2 の交点であるから $\textcircled{1}$ を満たし、 $t=2$ とすると

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}, \sin 2\beta = \frac{1}{2}$$

となり、 $0 < 2\alpha < 2\beta < \pi$ より

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 2\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。これより

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \cos \beta &= \sqrt{\frac{1+\cos 2\beta}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\sin(\beta - \alpha) &= \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha \\ &= 2\sin \beta \cos \beta \cdot \frac{\cos \alpha}{2\cos \beta} - 2\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\cos \beta}{2\cos \alpha} \\ &= \sin 2\beta \cdot \frac{\cos \alpha}{2\cos \beta} - \sin 2\alpha \cdot \frac{\cos \beta}{2\cos \alpha} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ &= \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 - (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}{4\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

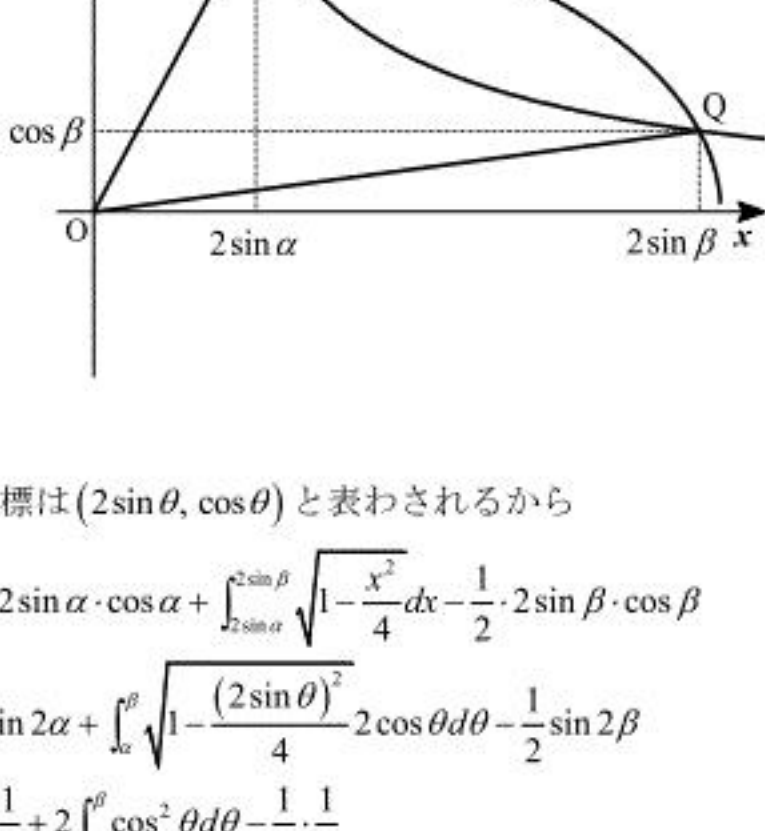
である。よって、 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$ となるから

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{3}$$

である。

(答) $\beta - \alpha = \frac{\pi}{3}$

(b)



曲線 C_1 上の点の座標は $(2\sin \theta, \cos \theta)$ と表わされるから

$$\begin{aligned}S_1(2) &= \frac{1}{2} \cdot 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \int_{2\sin \alpha}^{2\sin \beta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx - \frac{1}{2} \cdot 2\sin \beta \cdot \cos \beta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 - \frac{(2\sin \theta)^2}{4}} 2\cos \theta d\theta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \int_{\alpha}^{\beta} \cos^2 \theta d\theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \beta - \alpha + \frac{1}{2} (\sin 2\beta - \sin 2\alpha) \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

である。

(答) $S_1(2) = \frac{\pi}{3}$

(c)

2 曲線 C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を $S_3(t)$ とおくと

$$\begin{aligned}S_3(2) &= \int_{2\sin \alpha}^{2\sin \beta} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{1}{2x} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \left[\log |x| \right]_{2\sin \alpha}^{2\sin \beta} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \{ \log(2\sin \beta) - \log(2\sin \alpha) \} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \log \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{2\sin \beta \cos \beta \cdot \cos \alpha}{2\sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos \beta} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sin 2\beta \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sin 2\alpha \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}S_2(2) &= S_1(2) - S_3(2) \\ &= \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

である。

(答) $S_2(2) = \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3})$

(3)

P, Q の x 座標をそれぞれ $2\sin \alpha, 2\sin \beta$ ($0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$) とおくと、(2)(a)の考察より

$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$$

である。このとき、P, Q は C_1, C_2 の交点であるから $\textcircled{1}$ を満たし

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{t}, \sin 2\beta = \frac{1}{t}$$

となり、 $0 < 2\alpha < 2\beta < \pi$ より

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}} \\ &= \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t} \quad (\because t > 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\beta &= -\sqrt{1 - \frac{1}{t^2}} \\ &= -\frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t}\end{aligned}$$

である。これより

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2t+2\sqrt{(t+1)(t-1)}}{4t}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1})^2}{4t}} \\ &= \frac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} + \sqrt{1-\frac{1}{t}} \right) \\ \cos \beta &= \sqrt{\frac{1+\cos 2\beta}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1})^2}{4t}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} - \sqrt{1-\frac{1}{t}} \right)\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{2\cos \alpha} \\ &= \frac{\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t}} + \sqrt{1-\frac{1}{t}}} \\ &= \frac{\frac{1}{t} \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} - \sqrt{1-\frac{1}{t}} \right)}{\left(1+\frac{1}{t} \right) - \left(1-\frac{1}{t} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} - \sqrt{1-\frac{1}{t}} \right) \\ \sin \beta &= \frac{2\sin \beta \cos \beta}{2\cos \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t}} - \sqrt{1-\frac{1}{t}}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} + \sqrt{1-\frac{1}{t}} \right)\end{aligned}$$

となる。以上より、 $P(2\sin \alpha, \cos \alpha), Q(2\sin \beta, \cos \beta)$ を t を用いて表すと

$$P \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} - \sqrt{1-\frac{1}{t}}, \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} + \sqrt{1-\frac{1}{t}} \right) \right)$$

$$Q \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} + \sqrt{1-\frac{1}{t}}, \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} - \sqrt{1-\frac{1}{t}} \right) \right)$$

となる。

(答) $P \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} - \sqrt{1-\frac{1}{t}}, \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} + \sqrt{1-\frac{1}{t}} \right) \right), Q \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} + \sqrt{1-\frac{1}{t}}, \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} - \sqrt{1-\frac{1}{t}} \right) \right)$