

1 (1) 直線の式は $y = m(x - x_0) + y_0$ とおき、楕円式に代入すると

$$\frac{x^2}{4} + \{m(x - x_0) + y_0\}^2 = 1 \Leftrightarrow (1 + 4m^2)x^2 + 8m(y_0 - mx_0)x + 4(m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2 - 1) = 0$$

となり、接線となる条件式 $D = 0$ より

$$\frac{D}{4} = \{4m(y_0 - mx_0)\}^2 - (1 + 4m^2) \cdot 4(m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 - x_0^2)m^2 + 2x_0y_0m + 1 - y_0^2 = 0 \quad \dots ①$$

楕円に接する必要がある。式①を満たす m が存在することにより、十分な条件も満たされるので、

式①が成り立つ必要十分条件である。

(2) 2接線が垂直になることは、 m_1 に関する2次方程式①の2つの解の積が -1 になること。

解と係数の関係より、

$$\frac{1 - y_0^2}{4 - x_0^2} = -1 \quad (x_0 \neq \pm 2) \quad \dots ②$$

が成り立つ

(a) $y_0 = 0$ のとき ②より $\frac{1}{4 - x_0^2} = -1$ $x_0 > 0$ なら $x_0 = \sqrt{5} \therefore P(\sqrt{5}, 0)$

(b) $x_0 = 0$ のとき ②より $\frac{1 - y_0^2}{4} = -1$ $y_0 > 0$ なら $y_0 = \sqrt{5} \therefore P(0, \sqrt{5})$

(c) ②を変形して $x_0^2 + y_0^2 = 5$

つまり、 $x_0 = \pm 2$ のときも題意を満たす点 P は存在する。

(d) ①において $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$ に置換しても方程式は変わらない。

従って、題意は成り立つ。

(e) $L_1 \parallel K_1$ かつ $L_2 \parallel K_2$ であり、点 P において $L_1 \perp L_2$ なら

$$L_1 \perp L_2 \text{ かつ } L_2 \perp K_1 \text{ かつ } K_1 \perp K_2 \text{ かつ } K_2 \perp L_1$$

より、 $PQPP'$ は直方形。

また、2点 P, P' は円 $x^2 + y^2 = 5$ 上にあるので、 PP' は原点を通るので、円の直径に一致する。

$$\therefore PP' = 2\sqrt{5}$$

(f) 点 $(2\cos\theta, \sin\theta)$ での接線の方程式は

$$\frac{2\cos\theta}{4}x + \sin\theta y = 1 \Leftrightarrow \frac{\cos\theta}{2}x + \sin\theta y - 1 = 0$$

であり、この直線と原点との距離は $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\theta + \sin^2\theta}}$

円の半径は $\sqrt{5}$ なら

$$f(\theta) = \left(2\sqrt{5 - \frac{1}{\frac{1}{4}\cos^2\theta + \sin^2\theta}} \right)^2 = 4 \left(5 - \frac{4}{3\sin^2\theta + 1} \right)$$

ここで、 $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ なら $f(\theta)$ は

$$\text{最大値} \quad 4 \left(5 - \frac{4}{3+1} \right) = 16$$

$$\text{最小値} \quad 4 \left(5 - \frac{4}{0+1} \right) = 4 \quad \text{ととる。}$$

(g) 円 $x^2 + y^2 = 5$ に内接する長方形のうち、面積が最大になるものを考えよう。

それは、正方形になるときであり、対角線が $2\sqrt{5}$ であるから、面積は

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 10$$

[2] (1) $f'(x) = 2^{-x^2} + x \cdot (\log 2) (-2x) \cdot 2^{-x^2} = \{1 - (2 \log 2)x^2\} 2^{-x^2}$

(2) $f''(x) = -(4 \log 2)x \cdot 2^{-x^2} + \{1 - (2 \log 2)x^2\} (\log 2) (-2x) 2^{-x^2}$
 $= \{4(\log 2)^2 x^2 - 6 \log 2\} x \cdot 2^{-x^2}$

(3) $f''(x) = 0$ となるのは

$$\{4(\log 2)^2 x^2 - 6 \log 2\} x \cdot 2^{-x^2} = 0$$

$$2(\log 2)x^2 - 3 = 0$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{\frac{3}{2 \log 2}}$$

よって変曲点は

$$\left(\pm \sqrt{\frac{3}{2 \log 2}}, \pm \sqrt{\frac{3}{2 \log 2}} e^{-\frac{3}{2}} \right) \text{ (対称な点)} "$$

(4) 点 $\left(\sqrt{\frac{3}{2 \log 2}}, \sqrt{\frac{3}{2 \log 2}} e^{-\frac{3}{2}} \right)$ での接線は

$$y = \left\{ 1 - (2 \log 2) \frac{3}{2 \log 2} \right\} e^{-\frac{3}{2}} \left(x - \sqrt{\frac{3}{2 \log 2}} \right) + \sqrt{\frac{3}{2 \log 2}} e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore y = -2e^{-\frac{3}{2}} x + 3\sqrt{\frac{3}{2 \log 2}} e^{-\frac{3}{2}}$$

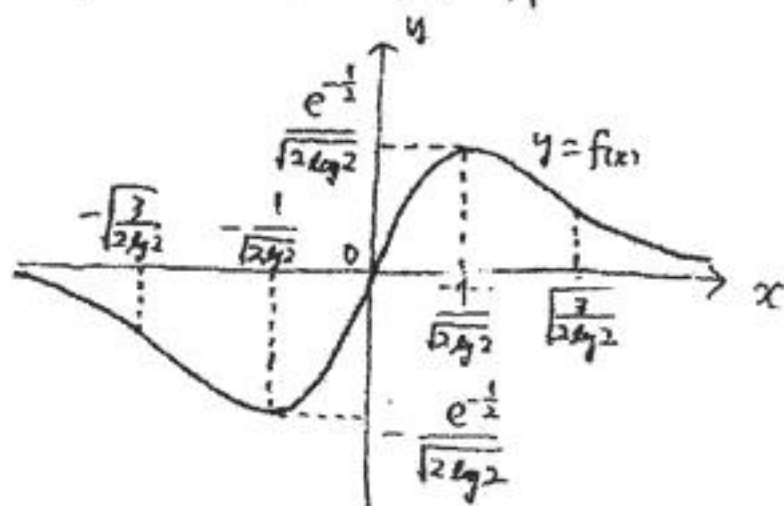
点 $\left(-\sqrt{\frac{3}{2 \log 2}}, -\sqrt{\frac{3}{2 \log 2}} e^{-\frac{3}{2}} \right)$ でも同様に $y = -2e^{-\frac{3}{2}} x - 3\sqrt{\frac{3}{2 \log 2}} e^{-\frac{3}{2}}$ "

(5) $f(x) = -f(-x)$ より原点で対称。増減表を書くと

x	$(-\infty) \dots -\sqrt{\frac{3}{2 \log 2}} \dots -\frac{1}{\sqrt{2 \log 2}} \dots 0 \dots \frac{1}{\sqrt{2 \log 2}} \dots \sqrt{\frac{3}{2 \log 2}} \dots (\infty)$
$f'(x)$	$- \quad - \quad 0 \quad + \quad + \quad 0 \quad - \quad -$
$f''(x)$	$- \quad 0 \quad + \quad + \quad 0 \quad - \quad - \quad 0 \quad +$
$f(x)$	$(-\infty) \searrow \quad \quad \quad \nearrow 0 \nearrow \quad \quad \quad \searrow \quad \searrow (+\infty)$

よって $y = f(x)$ のグラフの概形は

右のようになる。



(6) $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x t 2^{-t^2} dt$

$x^2 = u$ とおくと $dx = \frac{1}{2x} du$

x	$0 \rightarrow x$
u	$0 \rightarrow x^2$

したがって

$$F(x) = \int_0^{x^2} t \cdot 2^{-u} \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} 2^{-u} du$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{\log 2} 2^{-u} \right]_0^{x^2} = -\frac{1}{2 \log 2} (2^{-x^2} - 1) = \frac{1 - 2^{-x^2}}{2 \log 2}$$

(7) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^{-x^2}}{2 \log 2} = \frac{1}{2 \log 2}$