

1

- (1)

ア

 1

イ

 2

ウ

 1

エ

 1

オ

 1

カ

 0

キ

 1
- | |
|---|
| ク |
|---|

 5

ケ

 6

コ

 1
- (2)

(あ)

 3

(い)

 4

(う)

 1

(え)

 2

(お)

 3
- (3)

サ

 2

シ

 2

ス

 4

セ

 2

ソ

 0

タ

 0

チ

 3
- | |
|---|
| ツ |
|---|

 6

[解説]

- (1)
- (a)
- [1] 100 のカードを使うとき
1 枚で 100 となるので 1 通りである。
- [2] 100 のカードを使わないとき
10 のカードの使う枚数の選び方は 0~10 の 11 通りである。それぞれに対して 1 のカードを使う枚数は 1 通りに決まるので、この場合のカードの選び方は 11 通りである。
- [1],[2]より、カードを選ぶ方法は 12 通りである。

- (b)
- 100 のカードを 1 枚以上使うとき、100 のカードを 1 枚使うと残りは
- $$100n-100=100(n-1)$$
- となるようにカードを選べばよく、選び方は a_{n-1} 通りある。また 100 のカードを使わないとき 10 のカードの使う枚数の選び方は 0~10 の $10n+1$ 通りである。それぞれに対して 1 のカードを使う枚数は 1 通りに決まるので、この場合のカードの選び方は $10n+1$ 通りである。したがって
- $$a_n = a_{n-1} + 10n + 1$$
- となる。この式を変形すると
- $$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 10n + 1 \\ \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} &= 10n + 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n &= 10n + 11 \end{aligned}$$
- となる。ここで(a)から $a_1 = 12$ なので $n \geq 2$ のとき
- $$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (10k + 11) \\ &= 12 + 5n(n-1) + 11(n-1) \\ &= 5n^2 + 6n + 1 \end{aligned}$$
- となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

- (2)
- (a)
- $A=O$ のとき $A^2=O^2=O$ となるので $A=O \Rightarrow A^2=O$ は成立する。逆に $A^2=O$ のとき、例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると
- $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$
- となるが $A=O$ ではないので $A^2=O \Rightarrow A=O$ は成り立たない。以上より十分条件であるが必要条件ではない。

- (b)
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると
- $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$
- となるが
- $$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
- となり $AB=O \Rightarrow BA=O$ は成立しない。逆に $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として同様の操作を行うことにより $AB \neq O, BA=O$ となるため $BA=O \Rightarrow AB=O$ も成立しない。以上より必要条件でも十分条件でもない。

- (c)
- $AB=E$ のとき B は A の逆行列となるため $BA=E$ が成立する。したがって $AB=E \Rightarrow BA=E$ が成立する。逆に $BA=E$ のとき A は B の逆行列となるため $AB=E$ が成立する。したがって $BA=E \Rightarrow AB=E$ が成立する。以上より必要十分条件である。

- (d)
- まず「すべての n に対して $A^n \neq O$ が成り立つ」 $\Rightarrow$ 「 A は逆行列をもつ」について考える。 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のときすべての n において $A^n \neq O$ は成り立つが $\Delta(A)=0$ より A は逆行列をもたないため成立しない。
- 逆に「 A は逆行列をもつ」 $\Rightarrow$ 「すべての n に対して $A^n \neq O$ が成り立つ」について、もしある自然数 k に対して $A^k = O$ が成り立っていたとすると、
- $$\begin{aligned} A^k &= O \\ \Rightarrow A^{-1} A^k &= O \\ \Rightarrow A^{k-1} &= O \\ \dots \\ \Rightarrow A &= O \end{aligned}$$
- となり「 A は逆行列をもつ」という仮定に矛盾する。したがって「 A は逆行列をもつ」 $\Rightarrow$ 「すべての n に対して $A^n \neq O$ が成り立つ」は成立する。以上より必要条件ではあるが十分条件ではない。

- (e)
- まず「 $A^n = E$ となる n が存在する」 $\Rightarrow$ 「 A に逆行列が存在する」に関して、
- [1] $n=1$ のとき
 $A=E$ より A に逆行列が存在する。
- [2] $n \geq 2$ のとき
 $A^n = E$
 $\Leftrightarrow A A^{n-1} = E$
- より A^{n-1} は A の逆行列となる。以上より「 $A^n = E$ となる n が存在する」 $\Rightarrow$ 「 A に逆行列が存在する」が示せた。逆に「 A に逆行列が存在する」 $\Rightarrow$ 「 $A^n = E$ となる n が存在する」に関して、 $A=2E$ とおくとこれは逆行列が存在するが、 $n \neq 0$ より $A^n = 2^n E \neq E$ であるため成り立たない。以上より十分条件であるが必要条件ではない。

- (3)
- (a)
- $$\begin{aligned} \int x \log x dx &= \int \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \log x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + C \quad (\text{ただし } C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$
- となる。

- (b)
- x を $\sqrt{x}$ に置き換えると
- $$\begin{aligned} \log \sqrt{x} &< \sqrt{x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log x &< \sqrt{x} \\ \Leftrightarrow \frac{\log x}{\sqrt{x}} &< 2 \\ \Leftrightarrow \frac{\log x}{x} &< \frac{2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$
- となる。また、
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$
- が成立する。また x が十分に大きいとき $x > 0, \log x > 0$ なので
- $$0 < \frac{\log x}{x}$$
- が成立する。したがってはさみうちの原理により $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ となる。ここで $x = \frac{1}{t}$ とおくと

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} t \log \frac{1}{t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +0} (-t \log t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +0} t \log t &= 0 \end{aligned}$$

が成立する。 t を x と置換すれば、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ が得られる。

- (c)
- $$\begin{aligned} \int_a^b (x-a)(x-b) dx &= \int_a^b \left\{ \frac{1}{2} (x-a)^2 \right\}' (x-b) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} (x-a)^2 (x-b) \right]_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)^2 dx \\ &= -\frac{1}{6} \left[(x-a)^3 \right]_a^b \\ &= -\frac{(b-a)^3}{6} \end{aligned}$$
- となる。

(2)

(1)

$$\begin{aligned}f_n(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (1 - 2a_n)x + a_n^2 - a_{n+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (1 - 2a_n)x + a_n^2 - (a_n - 2)^2 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (1 - 2a_n)x + 4a_n - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x - 2a_n + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 2, 2a_n - 3\end{aligned}$$

となるので、

$$b_n = 2a_n - 3$$

である。

(答) $b_n = 2a_n - 3$

(2)

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= (a_n - 2)^2 + 2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 2 &= (a_n - 2)^2\end{aligned}$$

定義から、全ての n について $a_n > 2$ なので、この両辺の自然対数をとると、

$$\begin{aligned}\log(a_{n+1} - 2) &= \log(a_n - 2)^2 \\ \Leftrightarrow \log(a_{n+1} - 2) &= 2\log(a_n - 2)\end{aligned}$$

となる。ここで、 $c_n = \log(a_n - 2)$ とおくと、

$$c_{n+1} = 2c_n$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}c_n &= 2^{n-1}c_1 \\ &= 2^{n-1} \cdot \log(a_1 - 2) \\ &= 2^{n-1} \log \frac{1}{3} \\ &= \log \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}\end{aligned}$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned}\log(a_n - 2) &= \log \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} \\ \Leftrightarrow a_n - 2 &= \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} \\ \Leftrightarrow a_n &= \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} + 2\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} + 2 \right\} = 2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3) = 2 \cdot 2 - 3 = 1\end{aligned}$$

である。

(答) $a_n = \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} + 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$

(3)

$$\begin{aligned}b_n - 2 &= 2a_n - 5 \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} - 1\end{aligned}$$

となるが、

$$2 \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} = \frac{2}{3} < 1$$

なので、

$$\begin{aligned}b_n - 2 &< 0 \\ \Leftrightarrow b_n &< 2\end{aligned}$$

である。

(答) 2の方が大きい

(4)

(a)

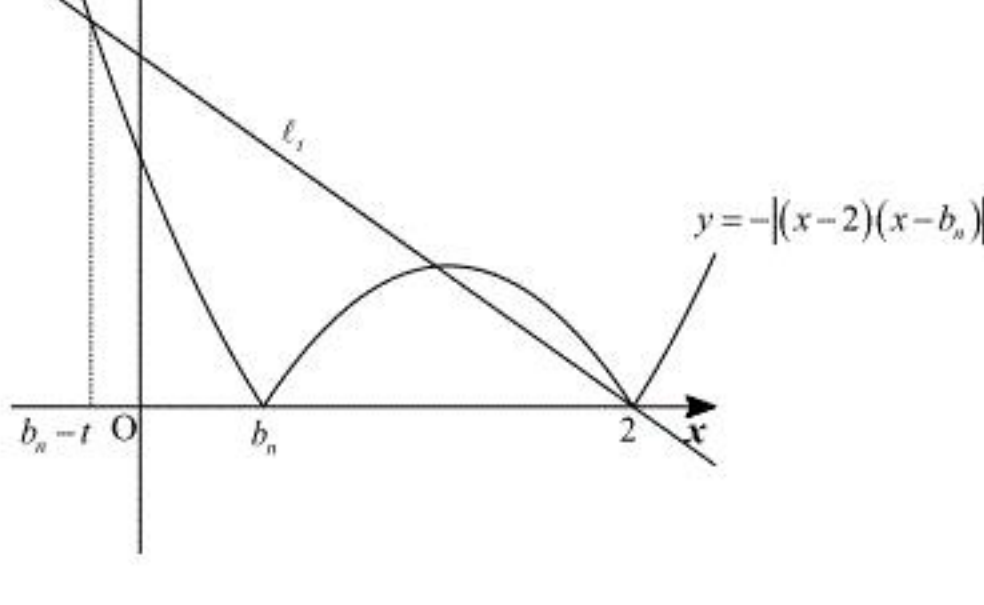
$$\begin{aligned}g_n(x) &= |f_n(x)| \\ &= |(x-2)(x-b_n)|\end{aligned}$$

である。よって、 $y = g_n(x)$ と ℓ_t の式を連立させると、

$$|(x-2)(x-b_n)| = -t(x-2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $x=2$ のとき、 $\textcircled{1}$ は必ず成り立つので、 $x=2$ は解の1つである。よって、全ての n について $\textcircled{1}$ が $x \neq 2$ なる解をちょうど1つ持つための条件を求めればよい。

[1] $x \leq b_n$ または $x > 2$ のとき



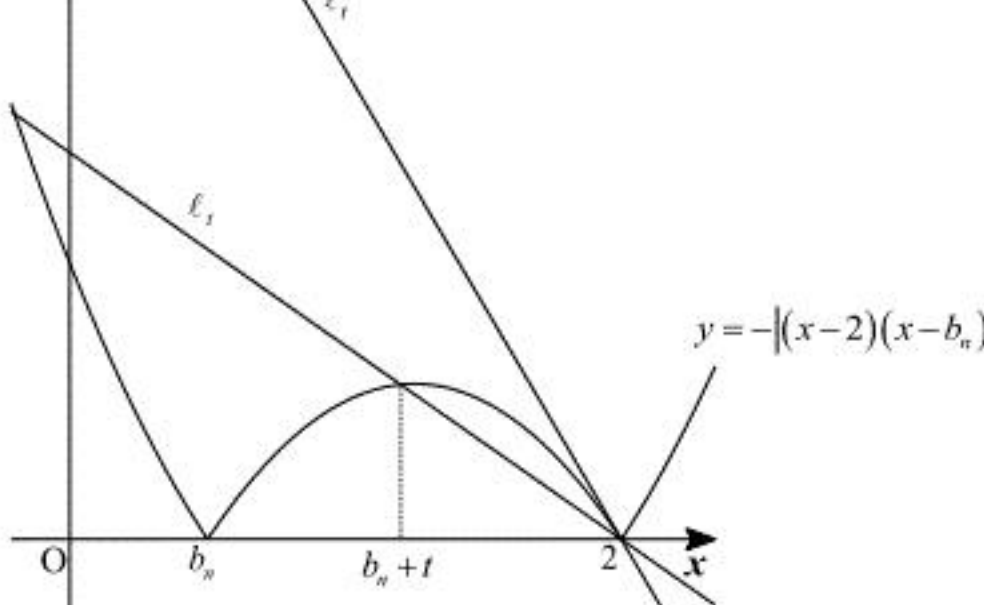
$\textcircled{1}$ を変形すると、

$$\begin{aligned}(x-2)(x-b_n) &= -t(x-2) \\ \Leftrightarrow x &= b_n - t\end{aligned}$$

となるが、 t は正の実数なので n に関係なく $b_n - t \leq b_n$ が成り立つ。ゆえに、 $\textcircled{1}$ は必ず

$x = b_n - t$ に解を持つ。

[2] $b_n < x < 2$ のとき



$\textcircled{1}$ を変形すると、

$$\begin{aligned}-(x-2)(x-b_n) &= -t(x-2) \\ \Leftrightarrow x &= b_n + t\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}b_n &< b_n + t < 2 \\ \Leftrightarrow 0 &< t < 2 - b_n\end{aligned}$$

であることが、 $\textcircled{1}$ 式が $b_n < x < 2$ の範囲に解を持つことの必要十分条件である。ここで、

(1), (2) の結果より、

$$b_n = 2a_n - 3 = 2 \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} + 1$$

となるので、

$$\begin{aligned}1 &< b_n < \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} &< 2 - b_n < 1\end{aligned}$$

である。以上から、 $0 < t < 1$ であれば、 $\textcircled{1}$ が $x = b_n + t$ に解を持つような n が存在する。

以上[1], [2]より、 $1 \geq t$ のとき、すべての n について $\textcircled{1}$ の解は $x = b_n - t, 2$ の2個であり、

$0 < t < 1$ のとき、 n の値によっては $\textcircled{1}$ の解が $x = b_n - t, b_n + t, 2$ の3個となる場合がある。

したがって、求める条件は

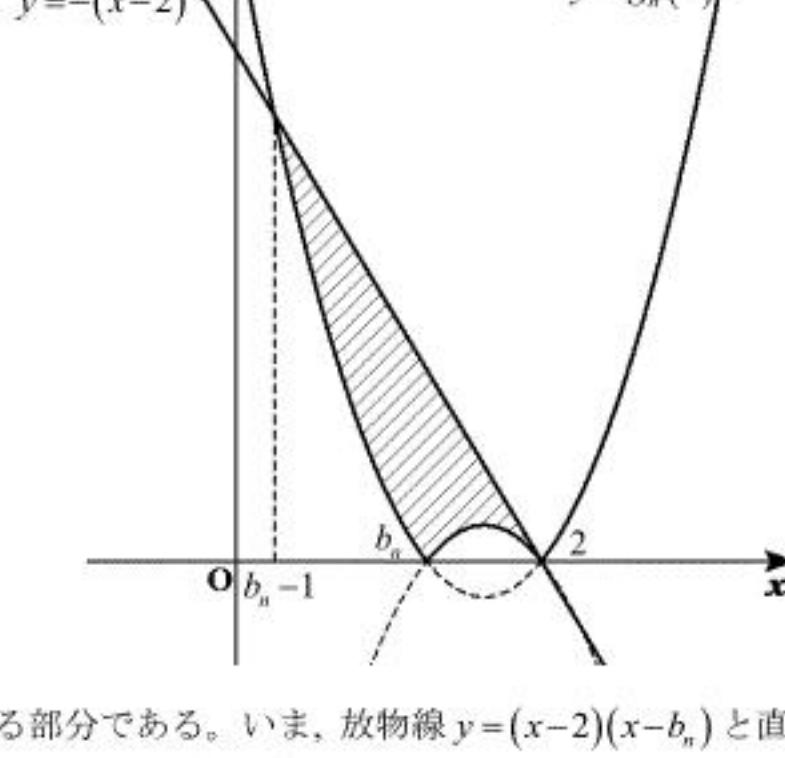
$$t \geq 1$$

である。

(答) $t \geq 1$

(b)

$T=1$ であり、 $\ell_T: y = -(x-2)$ である。よって、次の図が描ける。



斜線部が面積を求める部分である。いま、放物線 $y = (x-2)(x-b_n)$ と直線 $y = -(x-2)$ で囲まれた部分の面積を S_1 、放物線 $y = (x-2)(x-b_n)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とすると、

$$S_n = S_1 - 2S_2$$

である。よって、

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_{b_n-1}^2 \{ -(x-2) - (x-2)(x-b_n) \} dx \\ &= - \int_{b_n-1}^2 (x-2)(x-b_n+1) dx \\ &= \frac{1}{6} \{ 2 - (b_n-1) \}^3 \\ &= \frac{1}{6} (-b_n+3)^3 \\ S_2 &= \int_{b_n}^2 \{ 0 - (x-2)(x-b_n) \} dx \\ &= - \int_{b_n}^2 (x-2)(x-b_n) dx \\ &= \frac{1}{6} (-b_n+2)^3\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{6} (-b_n+3)^3 - 2 \cdot \frac{1}{6} (-b_n+2)^3 \\ &= \frac{1}{6} (b_n^3 - 3b_n^2 - 3b_n + 11)\end{aligned}$$

となる。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^3 = 1$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{1}{6} (1 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 11) \\ &= 1\end{aligned}$$

である。

(答) $S_n = \frac{1}{6} (b_n^3 - 3b_n^2 - 3b_n + 11)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$

3

(1)

(a)

$t=0, 1$ の場合も含め,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OR}} &= (1-t)\overrightarrow{\text{OP}} + t\overrightarrow{\text{OQ}} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= (1-t) \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1-u \\ u \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{cases} x &= (1-t)u \\ y &= t(1-u) \\ z &= tu \end{cases}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \begin{cases} x = (1-t)u \\ y = t(1-u) \\ z = tu \end{cases}$$

(b)

(a)の結果より,

$$x+z = (1-t)u + tu = u$$

である。また, $z \neq 0$ より, $u \neq 0$ であるので,

$$z = tu \Leftrightarrow t = \frac{z}{u} = \frac{z}{x+z} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と求まる。したがって, (a)の結果と①より

$$\begin{aligned}y &= t(1-u) \\ &= t - tu \\ &= \frac{z}{x+z} - z\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad y = \frac{z}{x+z} - z$$

(c)

(b)より

$$f(x, z) = \frac{z}{x+z} - z$$

$$\begin{aligned}g(x) &= f(x, c) \\ &= \frac{c}{x+c} - c\end{aligned}$$

である。よって, $y = g(x)$ は $x = -c$, $y = -c$ を漸近線にもつ双曲線であり, x 軸との交点は

$$\frac{c}{x+c} - c = 0 \Leftrightarrow x = 1-c$$

である。 $0 \leq x \leq 1-c$ において, $y = g(x)$ のグラフは, x 軸よりも上側にあるので, 求める面積 S は $0 < c < 1$ に対し,

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{1-c} g(x) dx \\ &= c \int_0^{1-c} \left(\frac{1}{x+c} - 1 \right) dx \\ &= c \left[\log(x+c) - x \right]_0^{1-c} \\ &= c \{ -(1-c) - \log c \} \\ &= c(c - \log c - 1)\end{aligned}$$

となる。これは $c=1$ のときの $S=0$ を含む。したがって,

$$S = c(c - \log c - 1)$$

である。

$$\text{(答)} \quad S = c(c - \log c - 1)$$

(2)

(1)(c)の結果より, $0 < h < 1$ に対する $v(h)$ を求めるには, $z=c$ における立体 K の断面積

$S(c) = c(c - \log c - 1)$ を $z=h$ から $z=1$ まで積分すればよいので,

$$\begin{aligned}v(h) &= \int_h^1 S(z) dz \\ &= \int_h^1 z(z - \log z - 1) dz \\ &= \int_h^1 (z^2 - z \log z - z) dz\end{aligned}$$

ここで, 問題1の(3)(a)の結果を用いると,

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{1}{3} z^3 - \left(\frac{1}{2} z^2 \log z - \frac{1}{4} z^2 \right) - \frac{1}{2} z^2 \right]_h^1 \\ &= \left[\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} z^2 \log z - \frac{1}{4} z^2 \right]_h^1 \\ &= \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right\} - \left\{ \frac{1}{3} h^3 - \frac{1}{2} h^2 \log h - \frac{1}{4} h^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} h^2 \log h - \frac{1}{3} h^3 + \frac{1}{4} h^2 + \frac{1}{12}\end{aligned}$$

と求まる。したがって, 求める体積 V は, 問題1の(3)(b)の結果を用いて,

$$\begin{aligned}V &= \lim_{h \rightarrow +0} v(h) \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \left(\frac{1}{2} h \cdot h \log h - \frac{1}{3} h^3 + \frac{1}{4} h^2 + \frac{1}{12} \right) \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad V = \frac{1}{12}$$