

1

(1)

$t$  は自然数なので,

$$\left[ \sqrt{k} \right] = t$$

$$\Leftrightarrow t \leq \sqrt{k} < t+1$$

$$\Leftrightarrow t^2 \leq k < (t+1)^2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t^2 \leq k < (t+1)^2$$

(2)

(a)

(1)の結果から,  $1^2 \leq k < 2^2 - 1$ , すなわち  $k=1, 2, 3$  に対しては,  $\frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} = \frac{1}{3}$  だから, 初めて自然数になるのは  $n=3$  のときである。よって,  $a_1=3$  である。

次に,  $2^2 \leq k < 3^2 - 1$ , すなわち  $k=4, 5, 6, 7, 8$  に対しては  $\frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} = \frac{1}{5}$  だから, 次に自然数になるのは  $n=8$  のときである。よって,  $a_2=8$  となる。

$$(\text{答}) \quad a_1=3, a_2=8$$

(b)

$$a_m = (m+1)^2 - 1$$

$$\sum_{k=1}^{a_m} \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} = m \quad \dots \textcircled{1}$$

となることを数学的帰納法で示す。

[1]  $m=1$  のとき

(a)で示したように  $a_1=3=2^2-1$  であり, またこのとき, 和は  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$  となるので,

確かに①が成り立つ。

[2]  $m=l$  のとき

①が成立すると仮定する。

$m=l+1$  のときを考えると,

$$\sum_{k=1}^{a_{l+1}} \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} = l + \sum_{k=a_l+1}^{a_{l+1}} \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1}$$

である。ここで,  $a_l+1=(l+1)^2$  であり,  $\frac{1}{2\left[ \sqrt{(l+1)^2} \right] + 1} = \frac{1}{2(l+1)+1}$  である。また,

$\left[ \sqrt{k} \right] = l+2$  となる最初の自然数  $k$  は,  $k=(l+2)^2$  であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=a_l+1}^{(l+2)^2-1} \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} &= \sum_{k=(l+1)^2}^{(l+2)^2-1} \frac{1}{2(l+1)+1} \\ &= \frac{1}{2(l+1)+1} \cdot \left[ \{(l+2)^2-1\} - (l+1)^2 + 1 \right] \\ &= \frac{1}{2(l+1)+1} \cdot (2l+3) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。したがって,  $a_{l+1}=(l+2)^2-1$  である。またこのとき,

$$\sum_{k=1}^{a_{l+1}} \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} = l+1$$

である。よって, ①は  $m=l+1$  でも成り立つ。

以上, [1], [2]よりすべての自然数  $m$  に対して, ①が成り立つことが示された。

よって,

$$a_m = (m+1)^2 - 1$$

$$\sum_{k=1}^{a_m} \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} = m$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_m = (m+1)^2 - 1$$

$$\sum_{k=1}^{a_m} \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} = m$$

(3)

4以上の整数  $n$  に対し,  $a_m < n \leq a_{m+1}$  となるような自然数  $m$  がただ一つ存在する。このとき,

$$(m+1)^2 - 1 < n \leq (m+2)^2 - 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow (m+1)^2 \leq n < (m+2)^2$$

$$\therefore m+1 \leq \sqrt{n} < m+2 \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。自然数  $k$  に対し,  $\frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} > 0$  であるから, ②を満たす  $m$  について,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{a_m} \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} &< \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} \leq \sum_{k=1}^{a_{m+1}} \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{a_m} \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} &< \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{a_{m+1}} \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} \\ \Leftrightarrow \frac{m}{\sqrt{n}} &< \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} \leq \frac{m+1}{\sqrt{n}} \quad (\because (2)) \end{aligned}$$

となり, さらに, ③より,

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} \leq 1$$

と評価できる。したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = 1$$

であることと, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} = 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\left[ \sqrt{k} \right] + 1} = 1$$

2

(1)

$f(x)=0$  の判別式を  $D_f$  としたときに、 $D_f \geq 0$ ，すなわち

$$D_f = b^2 - 4a^2 \geq 0$$

となることが  $f(x)=0$  が実数解をもつための必要十分条件である。

(答)  $b^2 - 4a^2 \geq 0$

(2)

$F(x)=0$  が実数解  $x=\alpha$  をもつならば、

$$F(\alpha) = f(g(\alpha)) = 0$$

と書ける。このとき、 $g(\alpha)$  は実数なので、 $f(x)=0$  は実数解  $x=g(\alpha)$  をもつことが分かる。

(証明終)

(3)

(2)より、 $F(x)=0$  が実数解をもつためには  $f(x)=0$  が実数解をもつことが必要であると分かる。これは、(1)より、

$$b^2 - 4a^2 \geq 0$$

と書ける。このとき、 $f(x)=0$  は2つの実数解

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$$

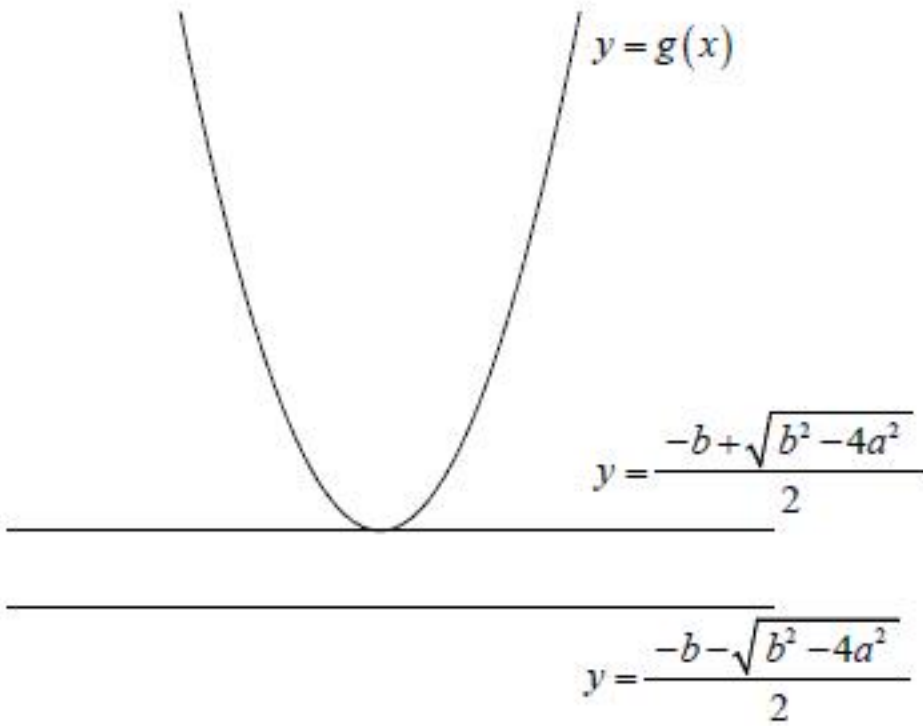
をもつ( $b^2 - 4a^2 = 0$  のとき重解)。ゆえに、 $F(x)=0$  がただ一つの実数解をもつためには、

$$\left[ g(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2} \text{ が、ただ一つの実数解をもつこと} \right] \quad \cdots (*)$$

が必要十分条件であるとわかる。ここで、 $g(x)$  は、

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 2\sqrt{b}x + 1 \\ &= (x + \sqrt{b})^2 - b + 1 \end{aligned}$$

と変形することができ、また、 $g(x)$  は下に凸な関数であることに注意すると、次図に示したようになればよい。



よって、(\*)の条件は

$$-b + 1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -b + 2 = \sqrt{b^2 - 4a^2}$$

と表せるが、 $b > 2$  のとき、左辺が負、右辺が0以上となるので成り立たない。

よって、 $(0 \leq) b \leq 2$  ( $\cdots$  ①)であり、このとき両辺を2乗して、

$$(-b + 2)^2 = b^2 - 4a^2$$

$$\Leftrightarrow b = a^2 + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と求められる。また、条件  $b^2 - 4a^2 \geq 0$  は

$$b^2 - 4a^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 \leq \frac{b^2}{4}$$

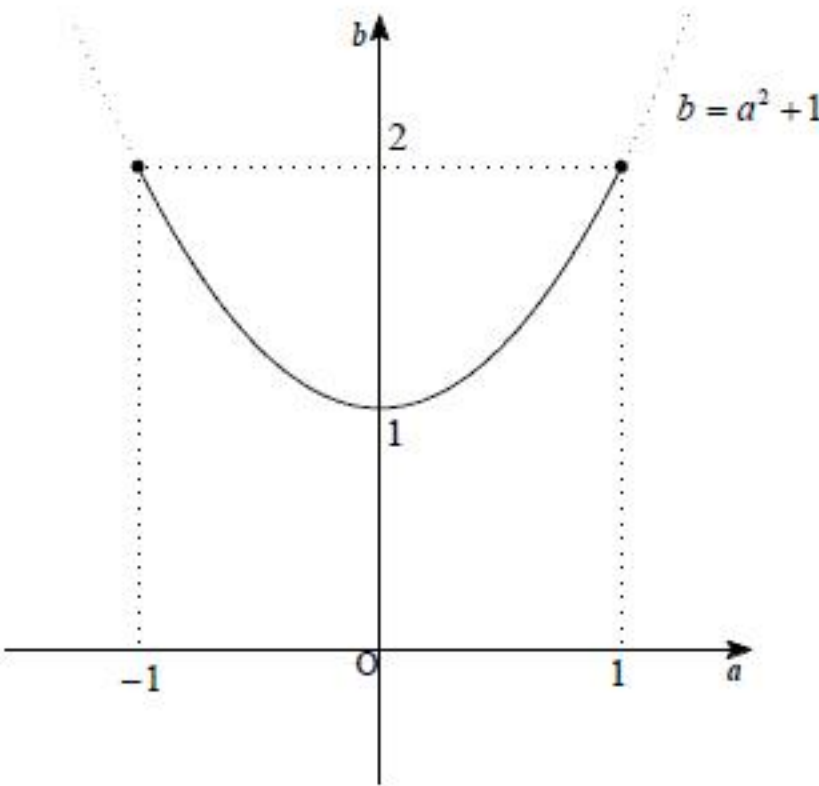
$$\Leftrightarrow -\frac{b}{2} \leq a \leq \frac{b}{2} \quad (\because b \geq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

と書くことができる。

以上①、②、③を満たす事が求める必要十分条件であり、これは、

$$b = a^2 + 1, \quad -1 \leq a \leq 1$$

と書ける。また、これを満たす点  $(a, b)$  の集合  $D$  を  $ab$  平面上に図示すると、次図の実線部のようになる。



(答) 前図,  $b = a^2 + 1 (-1 \leq a \leq 1)$

(4)

$F(x)=0$  のただ一つの実数解は、 $g(x)=-b+1$  の実数解に等しく、

$$g(x) = -b + 1$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{b})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{b}$$

と書ける。(3)より、 $b$  は  $1 \leq b \leq 2$  を満たす任意の値をとるので、求める値の範囲は、

$$-\sqrt{2} \leq x \leq -1$$

であると分かる。

(答)  $-\sqrt{2} \leq x \leq -1$