

1

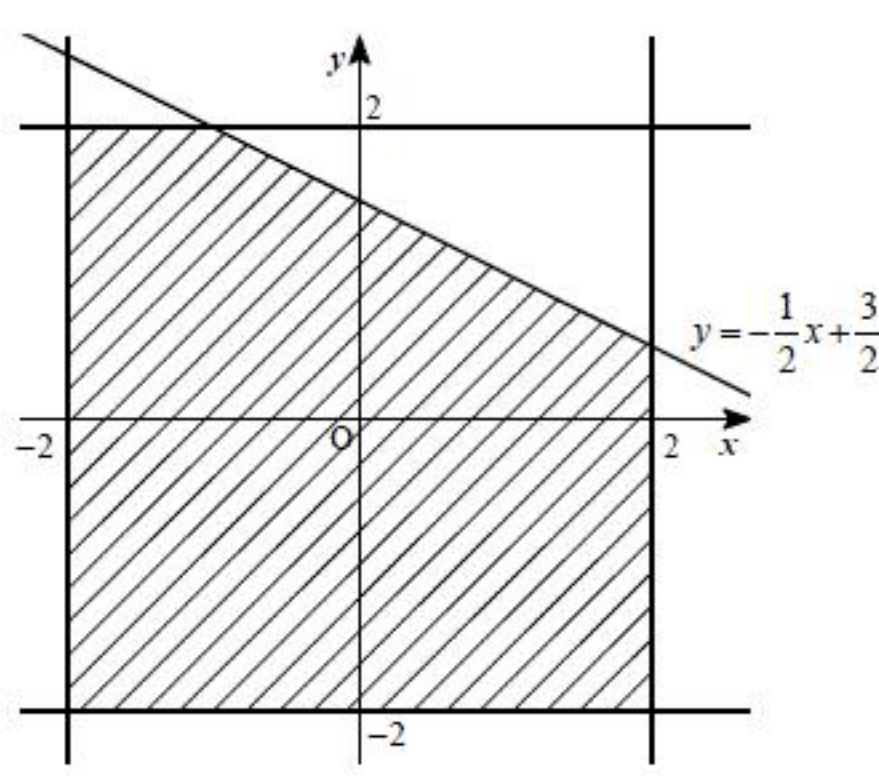
【解答】

- (1) ア 0 イ 2 ウ 6 エ 1 オ 5
 カ 7 キ 5 ク 1 ケ 6 コ 5
 サ 5 シ 9 ス 1 セ 1 ソ 9
 タ 3 チ 2 ツ 9
- (2) ア 2 イ 5 ウ 2 エ 7 オ 5
- (3) ア 0 イ 2 ウ 3 エ 0 オ 4
 カ 9 キ 2 ク 5 ケ 2 コ 9
 サ 3 シ 2

【解説】

(1)

座標平面において連立方程式 $|x| \leq 2, |y| \leq 2, y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ を満たす点 (x, y) の存在する領域は下図の斜線図のようになる。



(a)

$0 \leq |x| \leq 2, 0 \leq |y| \leq 2$ より, $2|x| - 3|y|$ は
 $|x| = 0, |y| = 2$ のとき最小値 -6

をとる。上図より $|x| = 0, |y| = 2$ を満たす (x, y) の値の組は $(0, -2)$ であるから

$P(0, -2)$ のとき最小値 -6

をとる。

(b)

$$y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

より

$$y - 3 \leq -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

となる。ここで, $0 \leq |x| \leq 2, 0 \leq |y| \leq 2$ より $y - 3 < 0, -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} < 0$ であるから

$$(y - 3)^2 \geq \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(x + 3)^2$$

となる。よって

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y - 3)^2 &\geq (x - 1)^2 + \frac{1}{4}(x + 3)^2 \\ &= \frac{5x^2 - 2x + 13}{4} \\ &= \frac{5}{4}\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{16}{5} \end{aligned}$$

となるから, $(x - 1)^2 + (y - 3)^2$ は

$$x = \frac{1}{5} \text{ かつ } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \text{ つまり } (x, y) = \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right) \text{ のとき最小値 } \frac{16}{5}$$

をとる。以上より, $(x - 1)^2 + (y - 3)^2$ は

$$P\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right) \text{ のとき最小値 } \frac{16}{5}$$

をとる。

(c)

(b)と同様にして

$$\begin{aligned} 2(x - 1)^2 + (y - 3)^2 &\geq 2(x - 1)^2 + \frac{1}{4}(x + 3)^2 \\ &= \frac{9}{4}\left(x - \frac{5}{9}\right)^2 + \frac{32}{9} \end{aligned}$$

となるから, $2(x - 1)^2 + (y - 3)^2$ は

$$x = \frac{5}{9} \text{ かつ } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \text{ つまり } (x, y) = \left(\frac{5}{9}, \frac{11}{9}\right) \text{ のとき最小値 } \frac{32}{9}$$

をとる。以上より, $2(x - 1)^2 + (y - 3)^2$ は

$$P\left(\frac{5}{9}, \frac{11}{9}\right) \text{ のとき最小値 } \frac{32}{9}$$

をとる。

(2)

(a)

硬貨を投げたとき表の出る確率を p とする。この硬貨を 4 回続けて投げたとき表がちょうど 1 回出る確率は

$${}_4C_1 p(1 - p)^3$$

である。また, 表がちょうど 2 回出る確率は

$${}_4C_2 p^2(1 - p)^2$$

である。これらが等しくなることと $p \neq 0, 1 - p \neq 0$ であることより

$$\begin{aligned} {}_4C_1 p(1 - p)^3 &= {}_4C_2 p^2(1 - p)^2 \\ \Leftrightarrow 4(1 - p) &= 6p \\ \Leftrightarrow p &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

となる。

(b)

硬貨を 1 回投げたときの点数の期待値は

$$3 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$$

である。硬貨を 3 回投げたとき, 各回の点数の期待値がそれぞれ $\frac{9}{5}$ であるから, 得られる点数の和の期待値は

$$\frac{9}{5} \times 3 = \frac{27}{5}$$

である。

(3)

(a)

$$3\sin^2 \alpha + 2\sin^2 \beta = 2\sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha = -2\sin^2 \beta$$

となる。ここで

$$0 \leq \sin^2 \beta \leq 1$$

を満たすから

$$-2 \leq 3\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \leq 0$$

となる。ここで

$$3\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha + 2 = 3\left(\sin \alpha - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} > 0$$

より $-2 \leq 3\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha$ は常に成り立ち

$$3\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha = 3\sin \alpha \left(\sin \alpha - \frac{2}{3}\right)$$

より $3\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \leq 0$ を満たす $\sin \alpha$ の値の範囲は

$$0 \leq \sin \alpha \leq \frac{2}{3}$$

となるから, $\sin \alpha$ のとりうる値の範囲は

$$0 \leq \sin \alpha \leq \frac{2}{3}$$

である。

(b)

$3\sin^2 \alpha + 2\sin^2 \beta = 2\sin \alpha$ のとき

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta &= -\frac{1}{2}\sin^2 \alpha + \sin \alpha \\ &= -\frac{1}{2}(\sin \alpha - 1)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。(a)の結果より $0 \leq \sin \alpha \leq \frac{2}{3} (< 1)$ であるから

$$0 \leq \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta \leq \frac{4}{9}$$

となる。

(c)

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \sqrt{2}\cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \sqrt{2}\cos 2\alpha \\ &= \frac{3}{2}\sin(2\alpha + \gamma) \end{aligned}$$

となる。ただし, γ は $\sin \gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos \gamma = \frac{1}{3}$ を満たし, $\sin \gamma > 0, \cos \gamma > 0$ より $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ である。

δ が $\sin \delta = \frac{2}{3}, -\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすとき, (a)の結果より $0 \leq \alpha \leq \delta$ となるから, $\gamma \leq 2\alpha + \gamma$

$\leq 2\delta + \gamma$ となる。 $0 < \gamma < \frac{\pi}{2} < 2\delta + \gamma < \frac{3}{2}\pi$ であるから, $\frac{3}{2}\sin(2\alpha + \gamma)$ は $2\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$ のとき最大

値 $\frac{3}{2}$ をとり, 最小値をとりうるのは $2\alpha + \gamma = \gamma$ または $2\alpha + \gamma = 2\delta + \gamma$ のときである。

[1] $2\alpha + \gamma = \gamma$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\sin(2\alpha + \gamma) &= \frac{3}{2}\sin \gamma \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

[2] $2\alpha + \gamma = 2\delta + \gamma$ のとき

$$\alpha = \delta \text{ となり, } \sin \delta = \frac{2}{3}, -\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2} \text{ より } \cos \delta = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\sin(2\alpha + \gamma) &= -\sqrt{2}\sin^2 \delta + \sin \delta \cos \delta + \sqrt{2}\cos^2 \delta \\ &= \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2]と, $\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{2}}{9} < \sqrt{2}$ であることから最小値は $\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{2}}{9}$ である。

2

(1)

(a)

ハミルトン・ケーリーの定理より

$$A^2 + A - 2E = O$$

が成り立つ。 $A^2 + aA + bE = O$ となるとき、辺々差をとって

$$(a-1)A + (b+2)E = O$$

となる。ここで、 A は E の実数倍でないから

$$\begin{cases} a-1=0 \\ b+2=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (a, b) = (1, -2)$$

である。

(答) $a=1, b=-2$

(b)

$A^2 + A - 2E = O$ より

$$\begin{cases} A(A-E) = -2(A-E) \\ A(A+2E) = A+2E \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} A^n(A-E) = (-2)^n(A-E) \\ A^n(A+2E) = A+2E \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} A^{n+1} - A^n = (-2)^n(A-E) \\ A^{n+1} + 2A^n = A+2E \end{cases}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} 3A^n &= A+2E - (-2)^n(A-E) \\ &= \begin{pmatrix} \{1-(-2)^n\} \cdot 2 + \{2+(-2)^n\} \cdot 1 & \{1-(-2)^n\} \cdot 4 + \{2+(-2)^n\} \cdot 0 \\ \{1-(-2)^n\} \cdot (-1) + \{2+(-2)^n\} \cdot 0 & \{1-(-2)^n\} \cdot (-3) + \{2+(-2)^n\} \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4-(-2)^n & 4-4 \cdot (-2)^n \\ -1+(-2)^n & -1+4 \cdot (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4-(-2)^n & 4-4 \cdot (-2)^n \\ -1+(-2)^n & -1+4 \cdot (-2)^n \end{pmatrix}$$

である。

$$(答) \quad A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4-(-2)^n & 4-4 \cdot (-2)^n \\ -1+(-2)^n & -1+4 \cdot (-2)^n \end{pmatrix}$$

(2)

(a)

$$\frac{dx}{dt} = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = -2e^{-t^2}$$

より

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{-2te^{-t^2}}{e^t} \\ &= -2te^{-t^2-t} \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \left\{ -2e^{-t^2-t} - 2te^{-t^2-t}(-2t-1) \right\} \cdot \frac{1}{e^t} \\ &= (4t^2 + 2t - 2)e^{-t^2-2t} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \frac{dy}{dx} = -2te^{-t^2-t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = (4t^2 + 2t - 2)e^{-t^2-2t}$$

(b)

$t=1$ のとき $(x, y) = (e, e^{-1})$, $\frac{dy}{dx} = -2e^{-2}$ となる。よって、求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -2e^{-2}(x-e) + e^{-1} \\ \Leftrightarrow y &= -2e^{-2}x + 3e^{-1} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad y = -2e^{-2}x + 3e^{-1}$$

3

(1)

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ が 2 点 $(1, 1)$, $(-1, 3)$ を通るとき

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 3 = a - b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 2 - a \end{cases}$$

となるから、放物線の方程式は $y = ax^2 - x + 2 - a$ となり

$$y = ax^2 - x - a + 2$$

$$\Leftrightarrow y = a \left(x - \frac{1}{2a} \right)^2 - a + 2 - \frac{1}{4a}$$

であるから、放物線の頂点 P の座標は $\left(\frac{1}{2a}, -a + 2 - \frac{1}{4a} \right)$ である。

$$(\text{答}) \left(\frac{1}{2a}, -a + 2 - \frac{1}{4a} \right)$$

(2)

放物線と x 軸の交点 A, B の x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、 α, β は方程式

$ax^2 - x + 2 - a = 0$ の解であるから、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{1}{a}, \alpha\beta = \frac{2-a}{a}$$

が成り立つ。△PAB が正三角形になるのは、図形の対称性より P の y 座標が $\frac{\sqrt{3}}{2} AB$ となるときである。ここで

$$\begin{aligned} AB &= \beta - \alpha \\ &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{a} \right)^2 - 4 \cdot \frac{2-a}{a}} \\ &= \frac{\sqrt{4a^2 - 8a + 1}}{-a} \quad (\because a < 0) \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} -a + 2 - \frac{1}{4a} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - 8a + 1}}{-a} \\ \Leftrightarrow 4a^2 - 8a + 1 &= 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{4a^2 - 8a + 1} \\ \Leftrightarrow 4a^2 - 8a + 1 &= 12 \\ \Leftrightarrow 4a^2 - 8a - 11 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{2 - \sqrt{15}}{2} \quad (\because a < 0) \end{aligned}$$

である。このときの三角形の 1 辺の長さは

$$\begin{aligned} AB &= \frac{\sqrt{12}}{\frac{2 - \sqrt{15}}{2}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{15} + 2)}{11} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{2 - \sqrt{15}}{2}, 1 \text{ 辺の長さ } \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{15} + 2)}{11}$$

(3)

放物線と x 軸によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とおくと

$$\begin{aligned} S(a) &= -\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= -\frac{a}{6} \left(\frac{\sqrt{4a^2 - 8a + 1}}{-a} \right)^3 \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{(4a^2 - 8a + 1)^3}{a^4}} \end{aligned}$$

である。 $f(a) = \frac{(4a^2 - 8a + 1)^3}{a^4}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(a) &= -\frac{4}{a^5}(4a^2 - 8a + 1)^3 + \frac{1}{a^4} \cdot 3(4a^2 - 8a + 1)^2(8a - 8) \\ &= \frac{4}{a^5}(4a^2 - 8a + 1)^2(2a^2 + 2a - 1) \end{aligned}$$

であるから、 $a < 0$ における $f(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	...	$\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$	...	0
$f'(a)$	-	0	+	
$f(a)$				

よって、 $f(a)$ が最小になるような a の値は $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$ である。 $S(a) = \frac{1}{6} \sqrt{f(a)}$ より、 $f(a)$ が最

小になるとき $S(a)$ も最小になるから、 $S(a)$ が最小になるような a の値は $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$$