

- (1)

 4

 4

 5

 6

 9

 4
- (2)

 4

 6

 9

 6

[解説]

(1)

$m = 10k + \ell$ とおく。(ただし k, ℓ は、 $1 \leq k \leq 9, 0 \leq \ell \leq 9$ を満たす整数とする。)

$$\begin{aligned} m^2 &= (10k + \ell)^2 \\ &= 100k^2 + 20k\ell + \ell^2 \end{aligned}$$

であり、 $100k^2$ の下 2 桁は 00 である。また $20k\ell$ の下 1 桁は 0 なので問題の条件を満たすためには ℓ^2 の下 1 桁が 6 である必要がある。これを満たす ℓ は 4, 6 である。

[1] $\ell = 4$ のとき

$100k^2$ の下 2 桁は 0 であるので、 $20k\ell + \ell^2$ の下 2 桁が 36 となる必要がある。ここで $\ell = 4$ のとき

$$20k\ell + \ell^2 = 80k + 16$$

なのでこの下 2 桁が 36 となるためには $80k$ の下 2 桁が 20 となればよい。この条件を満たす k は 4, 9 である。以上より条件を満たす 2 桁の整数は 44, 94 である。

[2] $\ell = 6$ のとき

$100k^2$ の下 2 桁は 0 であるので、 $20k\ell + \ell^2$ の下 2 桁が 36 となる必要がある。ここで $\ell = 6$ のとき

$$20k\ell + \ell^2 = 120k + 36$$

なのでこの下 2 桁が 36 となるためには $120k$ の下 2 桁が 00 となればよい。この条件を満たす k は 5 である。以上より条件を満たす 2 桁の整数は 56 である。

[1], [2]より求める 2 桁の正の整数 m を小さい順に並べると 44, 56, 94 となる。

(2)

$n = 10p + q$ とおく。(ただし p, q は、 $1 \leq p \leq 9, 0 \leq q \leq 9$ を満たす整数とする。)

$$\begin{aligned} n^3 &= (10p + q)^3 \\ &= 1000p^3 + 300p^2q + 30pq^2 + q^3 \end{aligned}$$

であり、 $1000p^3$ の下 2 桁は 00、 $300p^2q$ の下 2 桁は 00 なので $30pq^2 + q^3$ の下 2 桁が 36 となる必要がある。また $30pq^2$ の下 1 桁は 0 なので q^3 の下 1 桁は 6 となる。これを満たす q は 6 のみである。このとき

$$30pq^2 + q^3 = 1080p + 216$$

なので条件を満たすためには $1080p$ の下 2 桁が 20 となればよい。これを満たす p は 4, 9 のみである。以上より求める 2 桁の正の整数 n を小さい順に並べると 46, 96 となる。

$$(1) \quad \boxed{\text{サ}} \quad 1 \quad \boxed{\text{シ}} \quad 2 \quad \boxed{\text{ス}} \quad 1 \quad \boxed{\text{セ}} \quad 3$$

$$(2) \quad \boxed{\text{ソ}} \quad 2 \quad \boxed{\text{タ}} \quad 1 \quad \boxed{\text{チ}} \quad 2 \quad \boxed{\text{ツ}} \quad 3$$

[解説]

(1)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = u$ とおく。A, B は半径 1 の円周上にあるので $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1$ である。

$$|(1-t)\vec{a} + 2t\vec{b}| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow |(1-t)\vec{a} + 2t\vec{b}|^2 \geq 1$$

ここで

$$\begin{aligned} |(1-t)\vec{a} + 2t\vec{b}|^2 &= (1-t)^2 |\vec{a}|^2 + 4t(1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} + 4t^2 |\vec{b}|^2 \\ &= (1-t)^2 + 4t(1-t)u + 4t^2 \\ &= 5t^2 - 2t + 1 + 4t(1-t)u \\ &= (5-4u)t^2 - 2(1-2u)t + 1 \\ &= (5-4u)\left(t - \frac{1-2u}{5-4u}\right)^2 - \frac{(1-2u)^2}{5-4u} + 1 \\ &= (5-4u)\left(t - \frac{1-2u}{5-4u}\right)^2 + \frac{4u^2-4}{4u-5} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$|(1-t)\vec{a} + 2t\vec{b}|^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (5-4u)\left(t - \frac{1-2u}{5-4u}\right)^2 + \frac{4u^2-4}{4u-5} \geq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで $u = \vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \theta$, $0 < \theta < \pi$ より, $-1 < \cos \theta < 1$ であり, $5-4u > 0$ なので, ①式

の左辺は下に凸の 2 次関数の式となり, その最小値は $\frac{4u^2-4}{4u-5}$ である。ゆえに, 全ての t につ

いて①式が成り立つには

$$\frac{4u^2-4}{4u-5} \geq 1$$

が成り立てばよい。ここで $4u-5 < 0$ なので

$$\frac{4u^2-4}{4u-5} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 4u^2 - 4 \leq 4u - 5$$

$$\Leftrightarrow 4u^2 - 4u + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2u-1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$$

つまり $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値は $\frac{1}{2}$ となる。またこのとき

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{1}{3}\pi$$

となる。

(2)

(1)と同様に, $u = \vec{a} \cdot \vec{b}$ とおく。

$$\begin{aligned} |(1-t)\vec{a} + t\vec{b}|^2 &= (1-t)^2 |\vec{a}|^2 + 2t(1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2 |\vec{b}|^2 \\ &= (2t^2 - 2t + 1) + 2t(1-t)u \\ &= (2-2u)t^2 + (-2+2u)t + 1 \end{aligned}$$

なので,

$$|(1-t)\vec{a} + t\vec{b}| \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |(1-t)\vec{a} + t\vec{b}|^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (2-2u)t^2 + (-2+2u)t + 1 \geq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (2-2u)t^2 + (-2+2u)t + \frac{3}{4} \geq 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

と変形できる。ここで, $0 < \theta < \pi$ より, $-1 < \cos \theta = u < 1$ となり,

$$2-2u > 0$$

が成り立つ。よって, ②式の左辺を $f(t)$ とすると, $f(t)$ は下に凸な二次関数であり, 全ての実数 t に対して②が成り立つための必要十分条件は, $f(t)$ の判別式を D として, $D \leq 0$ となることである。すなわち,

$$\begin{aligned} D &= (-2+2u)^2 - 4 \cdot (2-2u) \cdot \frac{3}{4} \\ &= (2u-2)^2 + 3(2u-2) \\ &= (2u-2)(2u+1) \\ &= 2(u-1)(2u+1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow (u-1)(2u+1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (\cos \theta - 1)(2 \cos \theta + 1) &\leq 0 \quad (\because u = \cos \theta) \end{aligned}$$

となる。したがって

$$-\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq 1$$

であり, $0 < \theta < \pi$ と合わせて,

$$0 < \theta \leq \frac{2}{3}\pi$$

となる。

3

$$(1) \quad \boxed{\text{テ}} \quad 6 \quad \boxed{\text{ト}} \quad 2 \quad \boxed{\text{ナ}} \quad 6 \quad \boxed{\text{ニ}} \quad 2$$

$$(2) \quad \boxed{\text{ヌ}} \quad 1 \quad \boxed{\text{ネ}} \quad 1 \quad \boxed{\text{ノ}} \quad 1 \quad \boxed{\text{ハ}} \quad 1 \quad \boxed{\text{ヒ}} \quad 5 \quad \boxed{\text{フ}} \quad 2$$

$$\boxed{\text{ヘ}} \quad 5 \quad \boxed{\text{ホ}} \quad 1 \quad \boxed{\text{マ}} \quad 4$$

[解説]

(1)

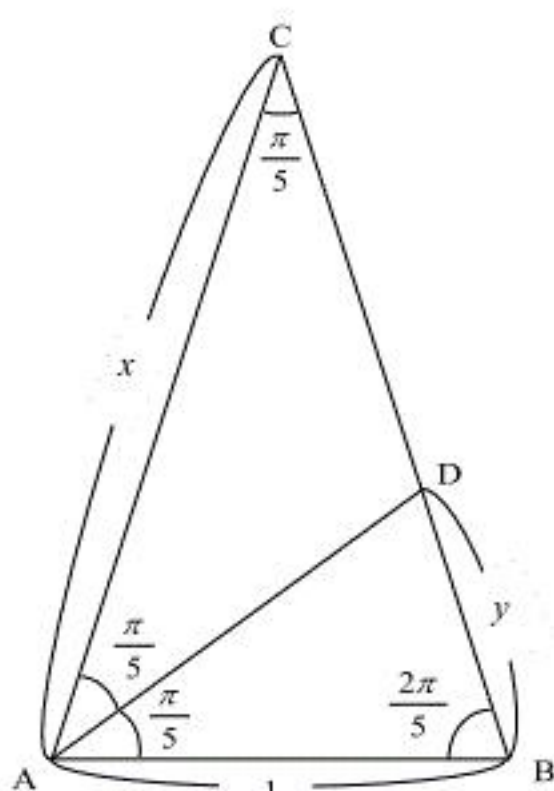
$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

である。

(2)



線分 AD は $\angle A$ の二等分線だから、 $\angle BAD = \frac{\pi}{5}$ である。また、

$$\begin{aligned} \angle ADB &= \pi - (\angle BAD + \angle ABD) \\ &= \pi - \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} \right) \\ &= \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

である。よって、 $\triangle ABD$ は $AB = AD$ の二等辺三角形である。さらに、 $\angle DAC = \frac{\pi}{5}$ であるか

ら、 $\triangle DAC$ は $AD = CD$ の二等辺三角形である。よって、

$$AD = CD = AB = 1$$

である。また、 $\triangle CAB \sim \triangle ABD$ なので、

$$CA : AB = AB : BD$$

$$\Leftrightarrow x : 1 = 1 : y$$

$$\Leftrightarrow xy = 1$$

である。さらに、

$$AC = BC$$

$$\Leftrightarrow x = CD + BD$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + y$$

$$\Leftrightarrow x - y = 1$$

である。これと $xy = 1$ から y を消去すると、

$$x(x-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

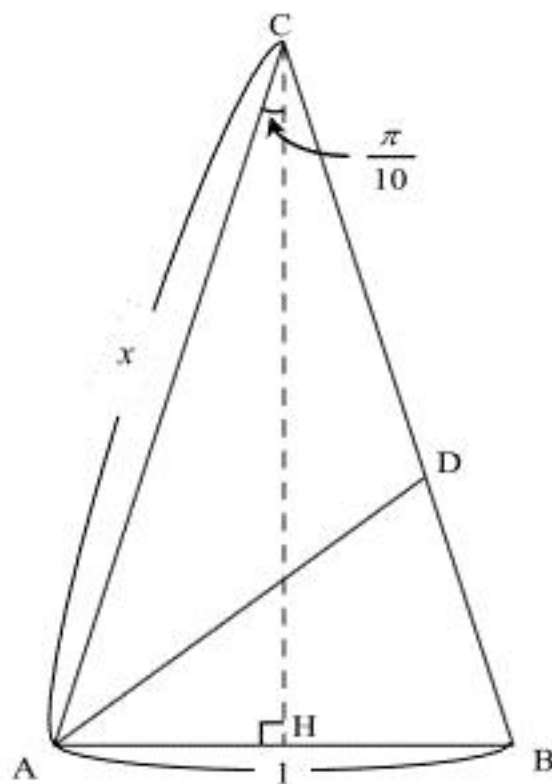
となるが、明らかに $x > 0$ なので、

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である。

点 C から辺 AB に下ろした垂線の足を H とおくと、 $\triangle ABC$ が $CA = CB$ の二等辺三角形である

ことから、 $\angle ACH = \frac{\pi}{10}$ 、 $\angle CHA = \frac{\pi}{2}$ 、 $AH = BH = \frac{1}{2}$ が成り立つ。



ゆえに、

$$\sin \frac{\pi}{10} = \sin \angle ACH = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

と求めることができる。

4

$$(1) \quad \boxed{\text{ミ}} \quad 5 \quad \boxed{\text{ム}} \quad 4$$

$$(2) \quad \boxed{\text{メ}} \quad 3 \quad \boxed{\text{モ}} \quad 4 \quad \boxed{\text{ヤ}} \quad 3 \quad \boxed{\text{ユ}} \quad 3 \quad \boxed{\text{ヨ}} \quad 4$$

$$\boxed{\text{ラ}} \quad 3 \quad \boxed{\text{リ}} \quad 1 \quad \boxed{\text{ル}} \quad 3$$

[解説]

(1) 点 P (0, t) を中心とする半径 1 の円 C_2 の方程式は、

$$x^2 + (y - t)^2 = 1$$

である。よって、これと放物線 $C_1: y = x^2$ の共有点の x 座標は、

$$x^2 + (x^2 - t)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - (2t - 1)x^2 + t^2 - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の解である。 $x^2 = s$ とおくと、この方程式は、

$$s^2 - (2t - 1)s + t^2 - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。 $s = 0$ とすると、 $\textcircled{2}$ は $t^2 - 1 = 0$ となるが、 $t > 1$ よりこれは成り立たない。よって、

$s (= x^2) > 0$ である。ゆえに、 $\textcircled{2}$ の正の解 1 つにつき、 $\textcircled{1}$ は実数解を 2 つ持つことになる。いま、

C_1 と C_2 はちょうど 2 つの共有点を持つので、 $\textcircled{2}$ は正の解を 1 つだけ持つ。これは、 $\textcircled{2}$ が正の

重解を持つ場合と、 $\textcircled{2}$ が正の解と負の解を 1 つずつ持つ場合が考えられる。

[1] $\textcircled{2}$ が正の重解を持つとき

$f(s) = s^2 - (2t - 1)s + t^2 - 1$ とおく。 $f(s) = 0$ の判別式を D とすると、 $D = 0$ が必要である。

$$D = (2t - 1)^2 - 4(t^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4t + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5}{4} (> 1)$$

である。逆にこのとき、

$$f(s) = s^2 - \frac{3}{2}s + \frac{9}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(s - \frac{3}{4}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{3}{4}$$

となり、 $\textcircled{2}$ は確かに正の解を持つ。よって、 $t = \frac{5}{4}$ は適する。

[2] $\textcircled{2}$ が正の解と負の解を 1 つずつ持つとき

$f(0) < 0$ が成り立てば良い。

$$f(0) = t^2 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 < t < 1$$

であるが、 $t > 1$ よりこれは不適である。

以上より、求める t の値は、 $t = \frac{5}{4}$ である。

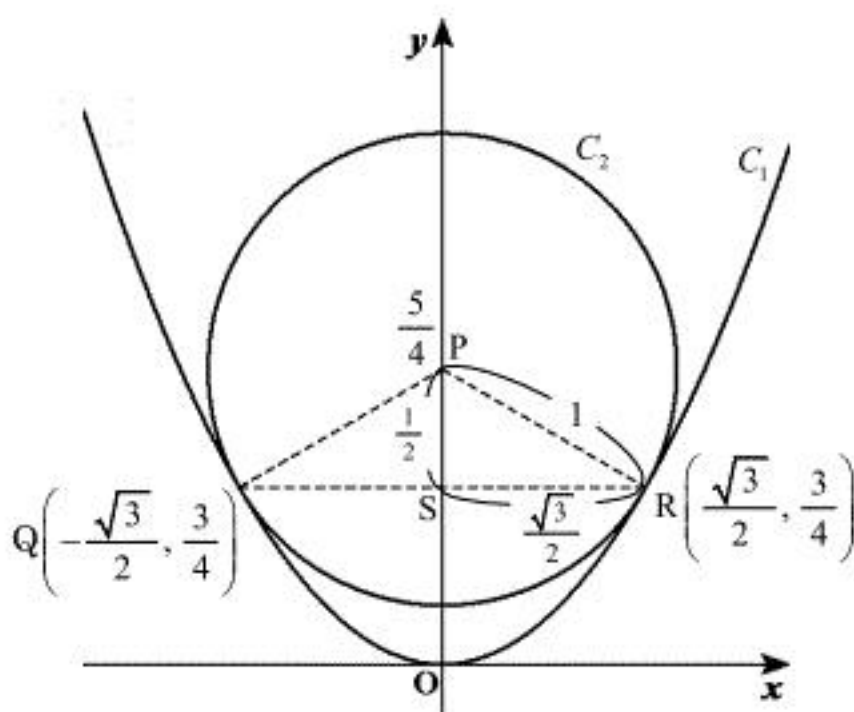
(2)

C_1, C_2 の共有点の x 座標は、(1) から、

$$s = x^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

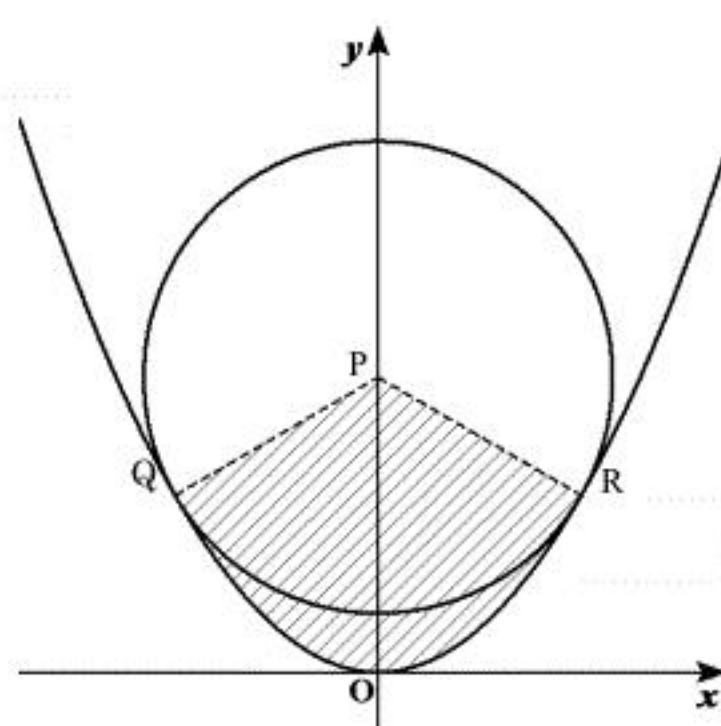
である。よって、点 Q, R の座標は、 $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$ である。また、点 $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ を S とする。このとき、次のグラフが描ける。



直線 PR の式を求めると、

$$\begin{aligned} y &= \frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{0 - \frac{\sqrt{3}}{2}}(x - 0) + \frac{5}{4} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

である。線分 PQ, PR と放物線 C_1 で囲まれた部分は次図斜線部である。



よって、この部分の面積は、

$$\begin{aligned} &2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5}{4} \right) - x^2 \right\} dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2 + \frac{5}{4}x \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

放物線 C_1 と円 C_2 で囲まれた部分の面積は、線分 PQ, PR と放物線 C_1 で囲まれた部分の面積から、線分 PQ, PR と円 C_2 で囲まれた扇形の面積を引いたものに等しい。最初の図から、

$\angle RPS = \frac{\pi}{3}$ である。よって、 $\angle RPQ = \frac{2}{3}\pi$ であり、扇形の面積は、

$$\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}\pi$$

である。したがって、放物線 C_1 と円 C_2 で囲まれた部分の面積は、

$$\frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$$

である。