

(1)

(i)

アイ15 ウ2 エ2

(ii)

オカキ255 クケコ128

(2)

(i)

サ4 シ9

(ii)

ス2 セソ63

(iii)

タ5 チツ63

(iv)

テ1 ト9

(3)

(i)

ナ9

(ii)

ニヌ12 ネノ64

(iii)

ハヒフ128 ヘ6

【解説】

(1)

(i)

自然数 k に対して A_k の 1 辺の長さを L_k とすると、 $L_1=1$ であり、また $L_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}L_k$ が成り立

っている。したがって、 L_k は初項1、公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の等比数列であるから、

$$L_k=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}$$

となる。したがって、正方形 A_k の周囲の長さは $4L_k=4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}$ であるから、求める和は

$$\sum_{k=1}^84\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}=4\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{15}{4}(2+\sqrt{2})$$

となる。

(ii)

A_k の面積を S_k とおくと、

$$S_k=L_k^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

となる。したがって、求める面積の和は

$$\sum_{k=1}^8\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{128}$$

となる。

(2)

(i)

1 桁目が $k(1\leq k\leq 9)$ であるような整数 m は、2 桁目の選び方が 8 通り、3 桁目の選び方が 7 通り、4 桁目の選び方が 6 通り、5 桁目の選び方が 5 通りと、どの k であっても同じ個数存在する。したがって、 k の選び方 9 通りのうち、偶数となるのは、 $k=2, 4, 6, 8$ の 4 通りであるから、求める確率は

$$\frac{4}{9}$$

となる。

(ii)

整数 m の選び方の総数は $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$ 通りである。

一方、題意を満たすような m の選び方の場合の数は、1 桁目の選び方が 4 通り、2 桁目の選び方が 5 通り、3 桁目の選び方が 1 桁目の偶数以外の 3 通り、4 桁目の選び方が 2 桁目の奇数以外の 4 通り、最後に 5 桁目の選び方が、1, 3 桁目の偶数を除く 2 通りであることから、 $4\cdot 5\cdot 3\cdot 4\cdot 2$ 通りとなる。

したがって、求める確率は

$$\frac{4\cdot 5\cdot 3\cdot 4\cdot 2}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}=\frac{2}{63}$$

となる。

(iii)

奇数と偶数が交互に並ぶのは、次の 2 通りがある。

[1] m の 1 桁目、3 桁目、5 桁目が偶数で、2 桁目、4 桁目が奇数のとき

これは(ii)の場合にほかならず、このようになる確率は

$$\frac{2}{63}$$

である。

[2] m の 1 桁目、3 桁目、5 桁目が奇数で、2 桁目、4 桁目が偶数のとき

このようになる確率は、(ii)と同様にして考えると、

$$\frac{5\cdot 4\cdot 4\cdot 3\cdot 3}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}=\frac{3}{63}\left(=\frac{1}{21}\right)$$

である。

以上[1], [2]より、求める確率は

$$\frac{2}{63}+\frac{3}{63}=\frac{5}{63}$$

となる。

(iv)

5 桁目で場合分けをする。

[1] 5 桁目が 7 以下のとき

このときは、 m は 89823 よりも小さくなるので不適。

[2] 5 桁目が 8 のとき

このときは、 m が 89823 を超えるには、4 桁目が 9 でなければならず、さらに、3 桁目は 8 または 9 でなければならないが、 m は異なる 5 個の数字からできる数だったので、これも不適である。

[3] 5 桁目が 9 のとき

この場合は、4 桁目以降は任意に選ぶことができるので、(i)と同様に考えて確率は

$$\frac{1}{9}$$

となる。

以上[1], [2], [3]より、求める確率は

$$\frac{1}{9}$$

となる。

(3)

(i)

$$AB=\begin{pmatrix}2&-ab\\a&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}ab&6\\-\frac{2}{3}&3a\end{pmatrix}$$
$$BA=\begin{pmatrix}0&3\\-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-ab\\a&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a&6\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}ab\end{pmatrix}$$

である。よって、 $AB=BA$ のとき、成分を比較して、

$$3a=\frac{1}{3}ab\Leftrightarrow a(b-9)=0\quad\therefore b=9\quad(\because a\neq 0)$$

を得る。

(ii)

ケーリー・ハミルトンの公式から

$$A^2-4A+(4+a^2b)E=O\quad\therefore A^2=4A-(4+a^2b)E$$

が成り立つ。これを用いて、 A^3 の次数下げをすると、

$$A^3=A^2\cdot A$$
$$=\{4A-(4+a^2b)E\}A$$
$$=4A^2-(4+a^2b)A$$
$$=4\{4A-(4+a^2b)E\}-(4+a^2b)A$$
$$=(12-a^2b)A-4(4+a^2b)E$$

となり、 $a\neq 0, b\neq 0$ より、 A は E の実数倍ではないから、

$$12-a^2b=0\quad\therefore a^2b=12$$

を得る。また、このとき、

$$A^3=-4(4+a^2b)E$$
$$=-4(4+12)E$$
$$=-64E$$

となる。

(iii)

$AB=BA$ であることから、多項式のように展開することができるので、

$$(A+B)^3+(A-B)^3=2(A^3+3AB^2)$$

となる。ここで、(ii)より、 $A^3=-64E$ であり、また

$$B^2=\begin{pmatrix}0&3\\-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$$

となるので、

$$(A+B)^3+(A-B)^3=2\{-64E+3A(-E)\}$$
$$=-128E-6A$$

となる。

(1)

曲線 C が点 $A(1, 3)$ を通ることから、

$$f(1) = 3 \quad \therefore b + c = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。一方、

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + (2a+b)$$

であり、点 A における接線の傾きが 2 であることから、

$$f'(1) = 2 \quad \therefore b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。よって、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より

$$b = 3, c = 1$$

と求まる。

(答) $b = 3, c = 1$

(2)

(1)より

$$f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+3)x - a + 1$$

となる。 $\ell: y = 2x + 1$ と $y = f(x)$ の交点の x 座標は、2 式を連立し、

$$x^3 - (a+2)x^2 + (2a+3)x - a + 1 = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-a) = 0$$

$$\therefore x = 1, a$$

となり、問題の条件 $a < 1$ により、1 と a は異なるから、 B の x 座標は a である。したがって、 y 座標は直線 ℓ の式に代入し、

$$y = 2a + 1$$

となるから、 $B(a, 2a+1)$ である。

(答) $B(a, 2a+1)$

(3)

$a < x < 1$ において、

$$f(x) - (2x+1) = (x-1)^2(x-a) > 0$$

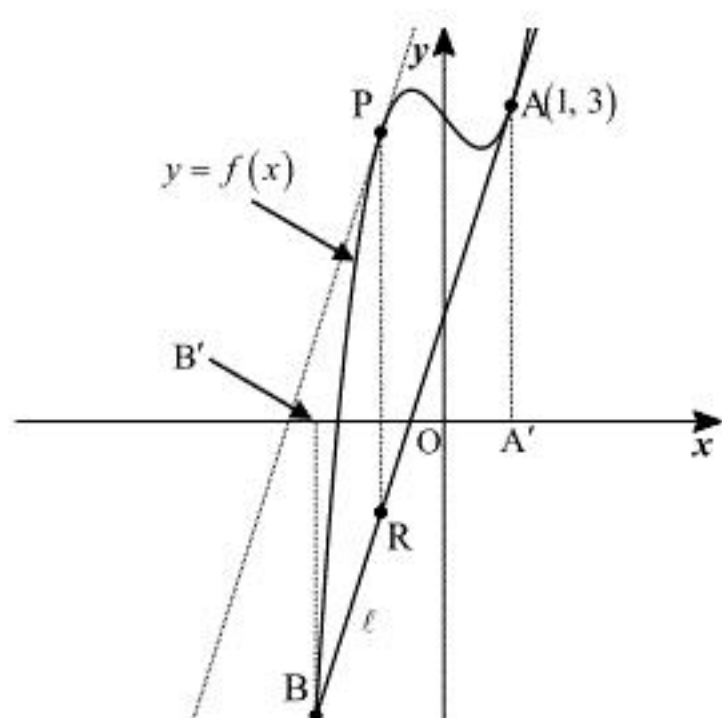
であるから、この区間で、常に $y = f(x)$ が直線 ℓ よりも上側にある。したがって、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^1 \{f(x) - (2x+1)\} dx \\ &= \int_a^1 (x-1)^2(x-a) dx \\ &= \int_a^1 \left\{ \frac{1}{3}(x-1)^3 \right\}' (x-a) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3(x-a) \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{1}{3}(x-1)^3 dx \\ &= 0 - \left[\frac{1}{12}(x-1)^4 \right]_a^1 \\ &= \frac{1}{12}(a-1)^4 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S_1 = \frac{1}{12}(a-1)^4$

(4)



上のようなグラフとなる。三角形 PAB において、 AB を底辺としてみたとき、高さが最も大きくなるのは、点 P における曲線 C の接線が直線 AB と平行、すなわちその傾きが 2 となるときである。(1)より

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + (2a+3)$$

であるから、接線の傾きが 2 となるような点の x 座標は、

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2(a+2)x + (2a+3) &= 2 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 2(a+2)x + (2a+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)\{3x - (2a+1)\} &= 0 \\ \therefore x &= 1, \frac{2a+1}{3} \end{aligned}$$

となる。 $x=1$ は点 A である。また、 $x = \frac{2a+1}{3}$ は $a < x < 1$ を満たすので、これが三角形 PAB の

面積を最大にするような P の x 座標である。さて、三角形 PAB の面積は、図のように A' 、 B' 、 R をとるとき、

$$A'B' \cdot PR \cdot \frac{1}{2}$$

で求めることができる。ここで、 $f(x) - (2x+1) = (x-1)^2(x-a)$ の式に注意すると、

$$\begin{aligned} PR &= f\left(\frac{2a+1}{3}\right) - \left\{2 \cdot \frac{2a+1}{3} + 1\right\} \\ &= \left(\frac{2a+1}{3} - 1\right)^2 \left(\frac{2a+1}{3} - a\right) \\ &= \left\{\frac{2(a-1)}{3}\right\}^2 \left(\frac{1-a}{3}\right) \\ &= \frac{4}{27}(1-a)^3 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} S_2 &= A'B' \cdot PR \cdot \frac{1}{2} \\ &= (1-a) \cdot \frac{4}{27}(1-a)^3 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{27}(1-a)^4 \end{aligned}$$

と求まる。ゆえに、

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{2}{27}(1-a)^4}{\frac{1}{12}(a-1)^4} = \frac{8}{9}$$

となる。

(答) $\frac{S_2}{S_1} = \frac{8}{9}$

(1)

 I_1 に部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_a^b \sin(x^2) dx \\
 &= \int_a^b \frac{1}{2x} \cdot 2x \sin(x^2) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2x} \{-\cos(x^2)\} \right]_a^b - \int_a^b \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \{-\cos(x^2)\} dx \\
 &= \frac{\cos(a^2)}{2a} - \frac{\cos(b^2)}{2b} - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx \\
 &= \frac{\cos(a^2)}{2a} - \frac{\cos(b^2)}{2b} - \frac{1}{2} I_2 \\
 \Leftrightarrow I_1 + \frac{1}{2} I_2 &= \frac{\cos(a^2)}{2a} - \frac{\cos(b^2)}{2b}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad I_1 + \frac{1}{2} I_2 = \frac{\cos(a^2)}{2a} - \frac{\cos(b^2)}{2b}$$

(2)

 I_2 に部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_a^b \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx \\
 &= \int_a^b \frac{1}{2x^3} \cdot 2x \cos(x^2) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2x^3} \sin(x^2) \right]_a^b - \int_a^b \left(-\frac{3}{2x^4} \right) \sin(x^2) dx \\
 &= -\frac{\sin(a^2)}{2a^3} + \frac{\sin(b^2)}{2b^3} + \frac{3}{2} \int_a^b \frac{\sin(x^2)}{x^4} dx \\
 &= -\frac{\sin(a^2)}{2a^3} + \frac{\sin(b^2)}{2b^3} + \frac{3}{2} I_3 \\
 \Leftrightarrow I_2 - \frac{3}{2} I_3 &= -\frac{\sin(a^2)}{2a^3} + \frac{\sin(b^2)}{2b^3}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad I_2 - \frac{3}{2} I_3 = -\frac{\sin(a^2)}{2a^3} + \frac{\sin(b^2)}{2b^3}$$

(3)

$a = \sqrt{2n\pi}$, $b = \sqrt{2(n+1)\pi}$ とおくと, $0 < a < b$ を満たし, $K_n = I_1 + \frac{3}{4} I_3$ と書ける。(1), (2)の結果を用いると,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\frac{1}{2} I_2 + \frac{\cos(a^2)}{2a} - \frac{\cos(b^2)}{2b} \\
 &= -\frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \\
 I_3 &= \frac{2}{3} I_2 + \frac{2}{3} \left\{ \frac{\sin(a^2)}{2a^3} - \frac{\sin(b^2)}{2b^3} \right\} \\
 &= \frac{2}{3} I_2
 \end{aligned}$$

である。ただし, n が整数であることより,

$$\begin{aligned}
 \cos(a^2) &= \cos(b^2) = 1 \\
 \sin(a^2) &= \sin(b^2) = 0
 \end{aligned}$$

となることを用いた。よって,

$$\begin{aligned}
 K_n &= \left(-\frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \right) + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} I_2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2(n+1)\pi}} \right)
 \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned}
 2n\pi\sqrt{2n\pi} K_n &= 2n\pi\sqrt{2n\pi} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2(n+1)\pi}} \right) \\
 &= n\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2n\pi}}{\sqrt{2(n+1)\pi}} \right) \\
 &= n\pi \cdot \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \\
 &= n\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\
 &= \frac{n\pi}{(n+1) + \sqrt{n^2 + n}} \\
 &= \frac{\pi}{\left(1 + \frac{1}{n} \right) + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}
 \end{aligned}$$

と書ける。ゆえに,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n\pi\sqrt{2n\pi} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\left(1 + \frac{1}{n} \right) + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{\pi}{2}$$

と求まる。

$$(答) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2n\pi\sqrt{2n\pi} K_n = \frac{\pi}{2}$$