

【解答】

(1)	ア	3	イ	2	ウ	1	エ	4	オ	1(5)*
	カ	6	キ	5(1)*	ク	6	ケ	1	コ	2
(2)(i)	サ	5	シ	3	ス	1	セ	2	ソ	1
	タ	1	チ	4						
(2)(ii)	ツ	1	テ	4	ト	1	ナ	1	ニ	2
	ヌ	3	ネ	1	ノ	2	ハ	1	ヒ	3
(3)	フ	4	ヘ	7	ホ	1	マ	8	ミ	5
	ム	8	メ	2	モ	9	ヤ	1	ユ	5
	ヨ	1								

(*オ、キは順不同より逆でも可)

(*オ, キは順不同より逆でも可)

【解説】

(1)

θ は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲を動くから、 $\sin \theta = t$ とおくと、 t は $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動く。また、与えられた関数 $f(\theta)$ を t で表すと

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 8\sin^3 \theta - 3(1 - 2\sin^2 \theta) - 12\sin \theta + 7 \\ &= 8t^3 + 6t^2 - 12t + 4 \end{aligned}$$

となるから、これを $g(t)$ において t で微分すると

$$\begin{aligned} g'(t) &= 24t^2 + 12t - 12 \\ &= 12(t+1)(2t-1) \end{aligned}$$

となる。よって、 $g(t)$ の t に関する増減表は以下のようになる。

θ	-1	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(\theta)$	0	-	0	+	
$f(\theta)$	14	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	6

したがって上の増減表より、関数 $f(\theta)$ は

$$\begin{aligned} t &= -1 \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

のとき最大値14をとり、

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

のとき最小値 $\frac{1}{2}$ をとることがわかる。

(2) (i)

P の逆行列を求めると、

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

(ii)

与えられた数列の定義より、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}AP \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるため、(i)より

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -u_n \\ v_{n+1} &= 4v_n \end{aligned}$$

である。すなわち、数列 $\{u_n\}$ 、 $\{v_n\}$ は等比数列となるため、 u_1 、 v_1 を用いると、

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^{n-1} u_1 \\ v_n &= 4^{n-1} v_1 \end{aligned}$$

と書ける。また、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} x_n &= u_n + v_n \\ y_n &= -2u_n + 3v_n \end{aligned}$$

である。従って、 $x_1 = 1$ 、 $y_1 = -2$ のとき、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^{n-1} \\ v_n &= 0 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n + v_n}{-2u_n + 3v_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{-2(-1)^{n-1}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。また、 $x_1 = 2$ 、 $y_1 = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^{n-1} \\ v_n &= 4^{n-1} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n + v_n}{-2u_n + 3v_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1} + 4^{n-1}}{-2(-1)^{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 1}{-2\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

(3)

与えられた式①を変形すると、

$$\begin{aligned} 7l &= 4m + 3 \\ \Leftrightarrow 7(l-1) &= 4(m-1) \end{aligned}$$

となる。7と4は互いに素な整数であるから、上式が成立するためには、ある整数 k を用いて、

$$\begin{aligned} l-1 &= 4k \\ \Leftrightarrow l &= 4k+1 \\ m-1 &= 7k \\ \Leftrightarrow m &= 7k+1 \end{aligned}$$

と書ける必要があり、逆にこのとき①を満たす。これを与えられた式②に代入すると、

$$\begin{aligned} lm &= 139 - 28n^2 + l + m \\ \Leftrightarrow (4k+1)(7k+1) &= 139 - 28n^2 + 11k + 2 \\ \Leftrightarrow 28(k^2 + n^2) &= 140 \\ \Leftrightarrow k^2 + n^2 &= 5 \end{aligned}$$

となる。 k 、 n が共に整数であることに注意すると、上式を満たす (k, n) の組み合わせは、

$$(k, n) = (-2, -1), (-2, 1), (-1, -2), (-1, 2), (1, -2), (1, 2), (2, -1), (2, 1)$$

の8通りであることが分かる。 k が定まれば l 、 m も一意に定まるから、与えられた式①、②を

満たす (l, m, n) も8通りである。また、 (l, m, n) が全て正となるのは

$$(k, n) = (1, 2), (2, 1)$$

となる場合であり、このとき、

$$(l, m, n) = (5, 8, 2), (9, 15, 1)$$

である。

(1)

 $0 \leq x \leq 1$ において,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log(1+x) + 2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

より関数 $f(x)$ は単調増加であり,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{1+x} \\ &> 0 \end{aligned}$$

より関数 $f(x)$ は下に凸である。(答) $0 \leq x \leq 1$ において, 関数 $f(x)$ は単調増加かつ下に凸な関数である。

(2)

(1)の結果と $f(0)=0$ より, 求める面積は,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{x + (1+x) \log(1+x)\} dx &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 (1+x) \log(1+x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} (1+x)^2 \log(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} (1+x)^2 \cdot \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{2} + 2 \log 2 - \left[\frac{1}{4} (1+x)^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + 2 \log 2 - \left(1 - \frac{1}{4} \right) \\ &= 2 \log 2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $2 \log 2 - \frac{1}{4}$

(3)

 $x \geq 0$ より $f_n(x) \geq 0$ であり, $f_n(0)=0$ であるため,

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^1 f_n(x) dx \\ &= \int_0^1 \left\{ nx^n + \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right\} dx \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} \int_0^1 nx^n dx &= \left[\frac{n}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) dx &= n \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) dx \\ &= \frac{n^2}{n+1} \left[\left(1 + \frac{x}{n} \right)^{n+1} \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right]_0^1 - \frac{n}{n+1} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n} \right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} dx \\ &= \frac{n^2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \left[\left(1 + \frac{x}{n} \right)^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} + \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n + \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \end{aligned}$$

であるから, ①は

$$S_n = \frac{n}{n+1} + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n + \left(\frac{n}{n+1} \right)^2$$

と書ける。したがって, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n+1} + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n + \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \right\} \\ &= 1 + e \log e - 1 \cdot e + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

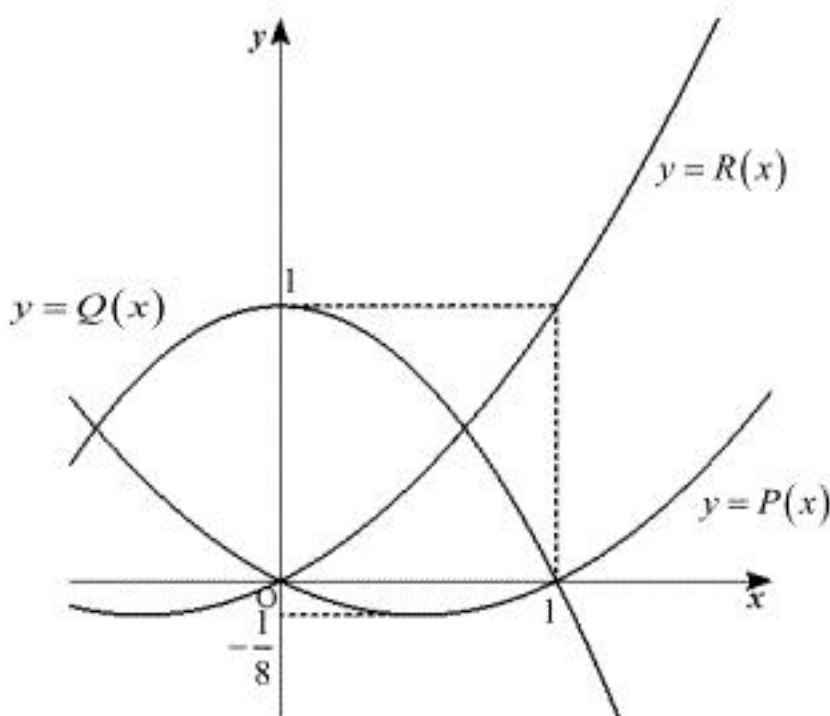
(答) 2

(1)

題意で与えられた 2 次の多項式 $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ はそれぞれ

$$P(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x), \quad Q(x) = -x^2 + 1, \quad R(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)$$

であるから、 $0 \leq x \leq 1$ における $y = P(x)$, $y = Q(x)$, $y = R(x)$ のグラフを図示すると、下図のようになる。



したがって、 $0 \leq x \leq 1$ において $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ がとり得る値の範囲は、

$$-\frac{1}{8} \leq P(x) \leq 0, \quad 0 \leq Q(x) \leq 1, \quad 0 \leq R(x) \leq 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{8} \leq P(x) \leq 0, \quad 0 \leq Q(x) \leq 1, \quad 0 \leq R(x) \leq 1$$

(2)

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ とおくと、

$$\begin{aligned} & f(-1)P(x) + f(0)Q(x) + f(1)R(x) \\ &= (\alpha - \beta + \gamma) \cdot \frac{1}{2}(x^2 - x) + \gamma(-x^2 + 1) + (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \frac{1}{2}(x^2 + x) \\ &= \left\{ \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) - \gamma + \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \right\} x^2 + \left\{ -\frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \right\} x + \gamma \\ &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma \end{aligned}$$

となるため、恒等式

$$f(x) = f(-1)P(x) + f(0)Q(x) + f(1)R(x)$$

が成立する。

(3)

$f(x) = aP(x) + bQ(x) + cR(x)$ に $x = -1, 0, 1$ を代入すると、

$$f(-1) = a, \quad f(0) = b, \quad f(1) = c$$

となるため、題意より、実数 a, b, c を

$$0 \leq a \leq 1, \quad 0 \leq b \leq 1, \quad 0 \leq c \leq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の範囲で動かしたときの、関数 $y = f(x) = aP(x) + bQ(x) + cR(x)$ の通過領域が D である。この通過領域 D と不等式

$$0 \leq x \leq 1$$

で表される領域の共通部分 D' を求めるべく、まず実数 t のとり得る値の範囲を $0 \leq t \leq 1$ とし $x = t$ と固定すると

$$y = aP(t) + bQ(t) + cR(t) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。次に①を満たすように実数 a, b, c が動くときの、 y のとり得る値の範囲を求めるが、ここで(1)より $0 \leq t \leq 1$ の範囲では、それぞれ

$$P(t) \leq 0, \quad Q(t) \geq 0, \quad R(t) \geq 0$$

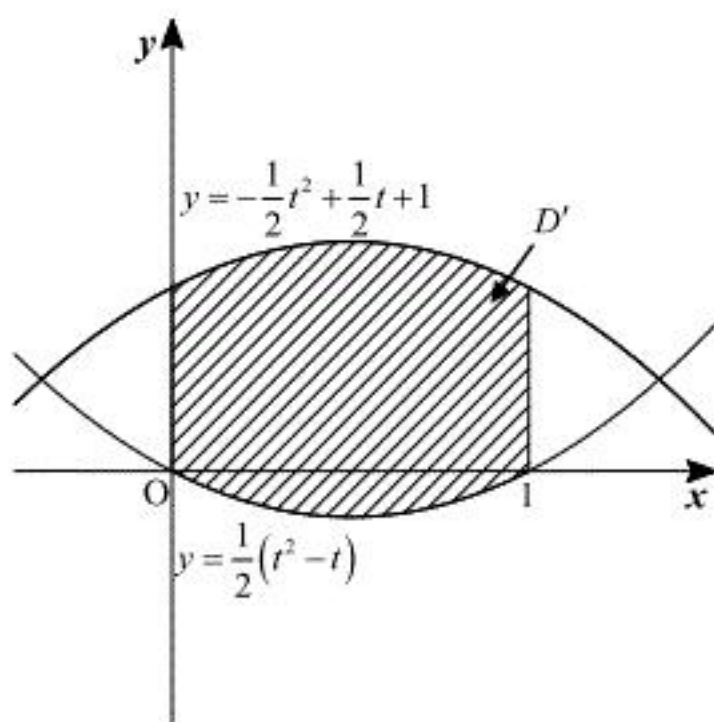
となることに注意すれば、②より y は $(a, b, c) = (0, 1, 1)$ のとき最大値

$$\begin{aligned} y &= Q(t) + R(t) \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 1 \end{aligned}$$

をとることがわかり、 $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ のとき最小値

$$\begin{aligned} y &= P(t) \\ &= \frac{1}{2}(t^2 - t) \end{aligned}$$

をとることがわかる。また、②より y は t に関する連続関数であるから、 t を動かせば領域 D' は以下の図の斜線部のようになることがわかる。



したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 1 \right) - \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t \right) \right\} dt &= \int_0^1 (-t^2 + t + 1) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t \right]_0^1 \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{7}{6}$$