

1

【解答】

(1)(i)

ア 5 イ 2 ウ 5 エ 3

(ii)

オ 5 カ 1 キ 5 ク 2 ケ 7 コ 1 サ 7 シ 2

(2)

ス 1 セ 1 ソ 5 タ 0 チ 2 ツ 4
テ 7 ト 2 ナ 8 ニ 7 ノ 7 ネ 7

(3)

ノ 1 ハ 2 ヒ 4 フ 1 ヘ 5 ホ 3 マ 2 ミ 9

【解説】

(1)(i)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a^2 - 3b & ab - 5b \\ -3a + 15 & -3b + 25 \end{pmatrix}$$

より,

$$A^2 = O \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 3b & ab - 5b \\ -3a + 15 & -3b + 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \therefore a = 5, b = \frac{25}{3}$$

となる。

(ii)

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -9 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -9 & -12 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (a+c)^2 - 9(b+d) & (a+c-12)(b+d) \\ -9(a+c)+108 & -9(b+d)+144 \end{pmatrix}$$

より,

$$(A+B)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (a+c)^2 - 9(b+d) & (a+c-12)(b+d) \\ -9(a+c)+108 & -9(b+d)+144 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \therefore a+c=12, b+d=16 \quad \dots\dots ①$$

となる。また,

$$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (a-c)^2 + 3(b-d) & (a-c+2)(b-d) \\ 3(a-c)+6 & 3(b-d)+4 \end{pmatrix}$$

より,

$$(A-B)^2 = E \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (a-c)^2 + 3(b-d) & (a-c+2)(b-d) \\ 3(a-c)+6 & 3(b-d)+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a-c=-2, b-d=-1 \quad \dots\dots ②$$

となる。したがって、①、②より,

$$a=5, b=\frac{15}{2}, c=7, d=\frac{17}{2}$$

と求まる。

(2)

多項式 $f(x)$ を x^2-5x+6 で割ると、 $6x-23$ 余るから、ある多項式 $q(x)$ が存在して、

$$f(x) = (x^2-5x+6)q(x) + 6x-23 \\ = (x-2)(x-3)q(x) + 6x-23$$

と表せる。よって、 $x=2, 3$ を代入することで、

$$f(2) = -11, f(3) = -5 \quad \dots\dots ③$$

が得られる。

また、 $f(x) = (ax^2+bx+c)(x^2-2x+3) + (-9x+28)$ と表されるとき、これを x について微分す

ると、

$$f'(x) = (2ax+b)(x^2-2x+3) + (ax^2+bx+c)(2x-2) - 9$$

となるから、これに $x=1$ を代入すると、

$$f'(1) = 2(2a+b) - 9$$

となる。よって、題意の条件から、 $f'(1) = -9$ より、

$$2a+b=0 \quad \dots\dots ④$$

となる。さらに、 $f(2) = 3(4a+2b+c) + 10$ であり、③、④から、

$$3(4a+2b+c) + 10 = -11 \\ \Leftrightarrow 3c = -21 \\ \therefore c = -7$$

と求まり、同様にして、 $f(3) = 6(9a+3b+c) + 1$ より、③から、

$$6(9a+3b+c) + 1 = -5 \\ \Leftrightarrow 9a+3b = 6 \\ \therefore 3a+b = 2$$

となる。これと④より、

$$a=2, b=-4$$

となることがわかる。したがって、

$$f(x) = (ax^2+bx+c)(x^2-2x+3) + (-9x+28) \\ = (2x^2-4x-7)(x^2-2x+3) + (-9x+28) \\ = 2x^4-8x^3+7x^2-7x+7$$

と求まる。

(3)

内積の定義より、

$$\cos \theta_1 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ = \frac{6}{3 \cdot 4} \\ = \frac{1}{2}$$

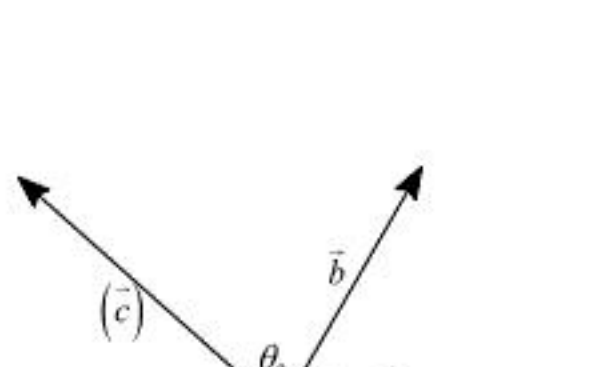
となる。また、

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} (|\vec{b}+\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2) \\ = \frac{1}{2} (49 - 16 - 25) \\ = 4$$

となるから、

$$\cos \theta_2 = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| |\vec{c}|} \\ = \frac{4}{4 \cdot 5} \\ = \frac{1}{5}$$

となる。ここで、 $\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角を $\theta_3 (0 \leq \theta_3 \leq \pi)$ とすると、 $\vec{a} \cdot \vec{c} > 0$ であるから、 θ_3 は鋭角であることがわかる。



したがって、上図より、

$$\theta_3 = \theta_2 - \theta_1$$

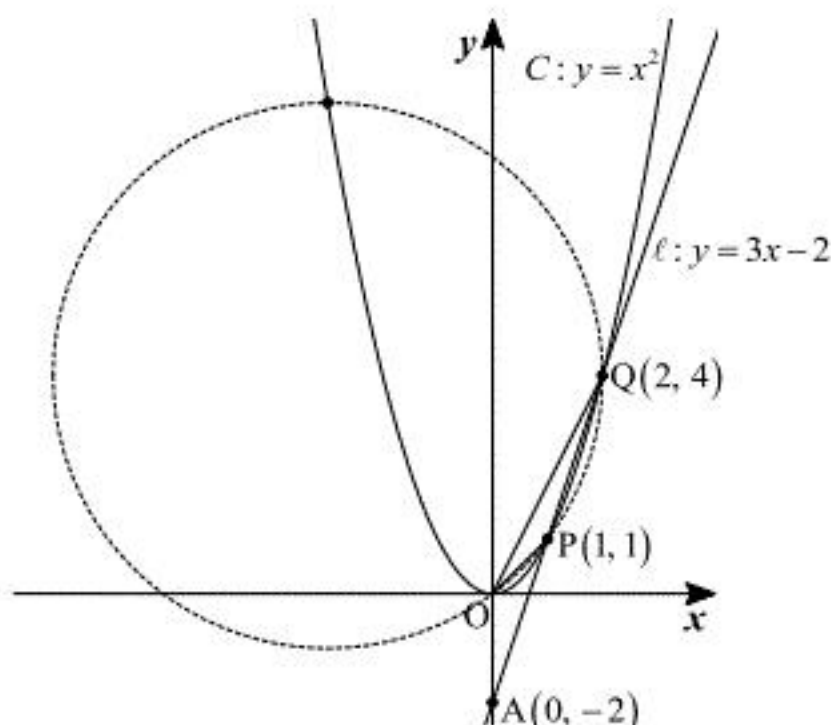
であることがわかるから、三角関数の加法定理より、

$$\cos \theta_3 = \cos (\theta_2 - \theta_1) \\ = \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1 \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} \\ = \frac{1+6\sqrt{2}}{10} (>0)$$

となり、このとき、

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \theta_3 \\ = 3 \cdot 5 \cdot \frac{1+6\sqrt{2}}{10} \\ = \frac{3}{2} + 9\sqrt{2}$$

と求まる。



(1)

直線 ℓ の傾きは

$$\frac{1 - (-2)}{1 - 0} = 3$$

であり、点 $A(0, -2)$ を通るから、直線 ℓ の方程式は、

$$y = 3x - 2$$

となる。また、点 Q は放物線 $C: y = x^2$ と直線 $y = 3x - 2$ の交点であるから、2 式を連立して y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^2 &= 3x - 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= 1, 2 \end{aligned}$$

となる。よって交点の座標は $(1, 1)$, $(2, 4)$ となる。点 $(1, 1)$ は点 P であるから、点 Q の座標は $(2, 4)$ となる。(答) 直線 $\ell: y = 3x - 2$, $Q(2, 4)$

(2)

外接円 C' の方程式を、

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

とおく。これが 3 点 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ を通るので、それぞれ代入すると

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = r^2 & \cdots \textcircled{1} \\ (1-a)^2 + (1-b)^2 = r^2 & \cdots \textcircled{2} \\ (2-a)^2 + (4-b)^2 = r^2 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。まず、 $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2(a+b) + 2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow -2(a+b) + 2 &= 0 \quad (\because \textcircled{1}) \\ \therefore a+b &= 1 & \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となり、同様に、 $\textcircled{3}$ より、

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - (4a+8b) + 20 &= r^2 \\ \Leftrightarrow -(4a+8b) + 20 &= 0 \quad (\because \textcircled{1}) \\ \therefore a+2b &= 5 & \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ より

$$a = -3, b = 4, r = 5$$

となるから、円 C' の方程式は

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

となり、この円の中心の座標は $(-3, 4)$ 、半径は 5 となる。(答) 円 $C': (x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$, 中心 $(-3, 4)$, 半径 5

(3)

 $y = x^2$ と $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$ の交点を求めればよいので、2 式を連立して y を消去すると、

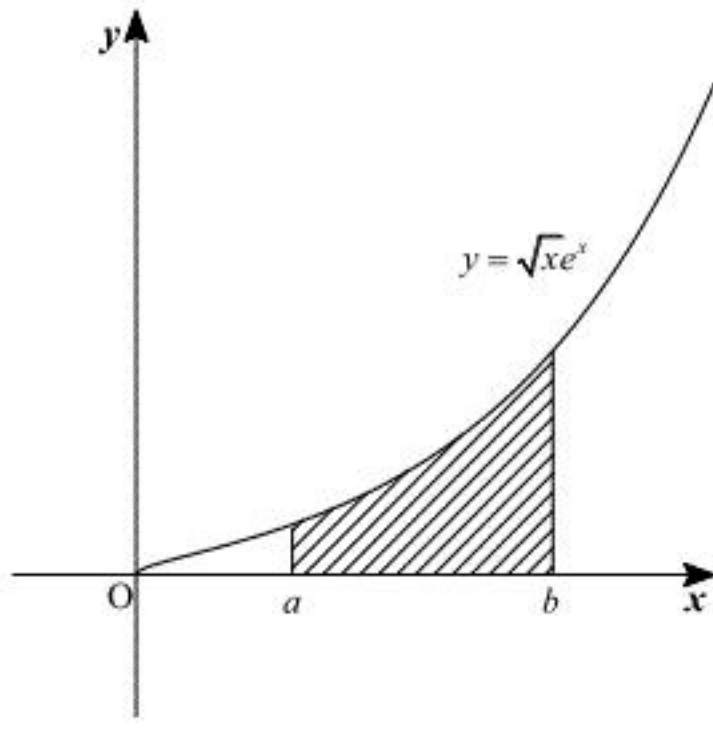
$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (x^2-4)^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow x^4 - 7x^2 + 6x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)(x+3) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 1, 2, -3 \end{aligned}$$

となる。 $x = 0, 1, 2$ はそれぞれ点 O, P, Q に対応するので、求める点の座標は $(-3, 9)$ となる。(答) $(-3, 9)$

3

(1)

与えられた関数 $f(x) = \sqrt{x}e^x$ は、 $x > 0$ において常に正の値をとることに注意する。



求める立体の体積は、

$$\begin{aligned} \int_a^b \pi \left(\sqrt{x}e^x \right)^2 dx &= \pi \int_a^b x e^{2x} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} x e^{2x} \right]_a^b - \pi \int_a^b \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} x e^{2x} \right]_a^b - \pi \left[\frac{1}{4} e^{2x} \right]_a^b \\ &= \frac{\pi}{2} \left(b - \frac{1}{2} \right) e^{2b} - \frac{\pi}{2} \left(a - \frac{1}{2} \right) e^{2a} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{2} \left(b - \frac{1}{2} \right) e^{2b} - \frac{\pi}{2} \left(a - \frac{1}{2} \right) e^{2a}$$

(2)

与えられた関数 $f(x) = \sqrt{x}e^x$ を x について微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} e^x + \sqrt{x} e^x \\ &= \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) e^x \end{aligned}$$

となる。したがって、点 $(b, f(b))$ における曲線 C の接線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \left(\sqrt{b} + \frac{1}{2\sqrt{b}} \right) e^b (x - b) + \sqrt{b} e^b \\ \therefore y &= \left(\sqrt{b} + \frac{1}{2\sqrt{b}} \right) e^b x + \left(\frac{\sqrt{b}}{2} - b\sqrt{b} \right) e^b \end{aligned}$$

と求まる。この直線が点 $(a, 0)$ を通るとき、 a は

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{b} + \frac{1}{2\sqrt{b}} \right) e^b a + \left(\frac{\sqrt{b}}{2} - b\sqrt{b} \right) e^b &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{2b^2 - b}{2b + 1} \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

と求まるから、 $b - a$ を計算すると、

$$\begin{aligned} b - a &= b - \frac{2b^2 - b}{2b + 1} \\ &= \frac{2b}{2b + 1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{接線 } \ell: y = \left(\sqrt{b} + \frac{1}{2\sqrt{b}} \right) e^b x + \left(\frac{\sqrt{b}}{2} - b\sqrt{b} \right) e^b, \quad b - a = \frac{2b}{2b + 1}$$

(3)

(2) で $b = x_n$ とおけば、題意より $a = x_{n-1}$ となるから、

$$x_n - x_{n-1} = \frac{2x_n}{2x_n + 1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x_n - x_{n-1} = \frac{2x_n}{2x_n + 1}$$

また、

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &> \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{2x_n}{2x_n + 1} &> \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x_n - \frac{1}{2}}{2x_n + 1} &> 0 \end{aligned}$$

であり、 $x_n > 0$ であるから、

$$x_n - \frac{1}{2} > 0$$

を示せばよい。ここで、

$$x_n - x_{n-1} = \frac{2x_n}{2x_n + 1} > 0 \quad (\because x_n > 0)$$

であるから、 x_n は n に関して単調増加し、

$$x_n > x_{n-1} > \cdots > x_1 > x_0 = 1$$

となるので、

$$\begin{aligned} x_n - \frac{1}{2} &> 1 - \frac{1}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

さらに、 $x_n - x_{n-1} > \frac{1}{2}$ より、

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) > 1 + \frac{n}{2}$$

となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ となることがわかるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n}{2x_n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2 + \frac{1}{x_n}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}) = 1$$

(4)

題意より、 V_n は半径 $f(x_n)$ 、高さ $x_n - x_{n-1}$ の円錐の体積であるから

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{3} \pi \left(\sqrt{x_n} e^{x_n} \right)^2 \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot x_n (x_n - x_{n-1}) e^{2x_n} \end{aligned}$$

と計算できる。また、 W_n ($n = 2, 3, \dots$) は、(1) の答えに $b = x_n$ 、 $a = x_{n-1}$ を代入したものであるから、

$$W_n = \frac{\pi}{2} \left(x_n - \frac{1}{2} \right) e^{2x_n} - \frac{\pi}{2} \left(x_{n-1} - \frac{1}{2} \right) e^{2x_{n-1}}$$

となる。ここで、(3) より $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}) = 1$ である。また、(2) より $x_{n-1} = \frac{2x_n^2 - x_n}{2x_n + 1}$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n - 1}{2x_n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2x_n}}{1 + \frac{1}{2x_n}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n}{V_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} \left(x_n - \frac{1}{2} \right) e^{2x_n} - \frac{\pi}{2} \left(x_{n-1} - \frac{1}{2} \right) e^{2x_{n-1}}}{\frac{\pi}{3} \cdot x_n (x_n - x_{n-1}) \cdot e^{2x_n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{2x_n} \right) - \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} - \frac{1}{2x_n} \right) e^{-2(x_n - x_{n-1})}}{x_n - x_{n-1}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2}}{1} \\ &= \frac{3}{2} (1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

となることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{2} (1 - e^{-2})$$