

- (1) ア 1 イ 3 ウ 1 エ 3 オ 6
 (2) カ 9 キ 2 ク 4 ケ 1 コ 4
 (3) サ 1 シ 6 ス 3 セ 9 ソ 4
 タ 2 チ 5 ツ 5

〔解説〕

(1)

$$f(x) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 6$$

であるから、放物線 $y = f(x)$ の軸は $x = \frac{1}{3}$ であり、頂点の座標は $\left(\frac{1}{3}, 6\right)$ である。

(2)

求める曲線の方程式は、

$$y - (-8) = 9(x - 1)^2 - 6(x - 1) + 7$$

$$\Leftrightarrow y = 9x^2 - 24x + 14$$

となる。

(3)

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{6}i}{3}$$

となる。また、これらの虚数解を α, β とするとき、 $\alpha + 2, \beta + 2$ は、

$$\frac{1 \pm \sqrt{6}i}{3} + 2 = \frac{7 \pm \sqrt{6}i}{3}$$

であるから、 $\alpha + 2, \beta + 2$ を解にもつ 2 次方程式は、

$$x = \frac{7 + i\sqrt{6}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 7 = i\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow (3x - 7)^2 = -6$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 42x + 55 = 0$$

と書くことができる。

- (1) ア 1 イ 0 ウ 2 エ 6 オ 4
 カ 6 キ 5 ク 6 ケ 5
 (2) コ 4 サ 5 シ 7 ス 5 セ 2
 ソ 1 タ 5
 (3) チ 7 ツ 6 テ 5 ト 1 ナ 4

〔解説〕

(1)

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

である。また,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 = 8$$

であるから,

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{8}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{26}} = \frac{4}{65} \sqrt{65}$$

となる。

(2)

$\vec{a} \perp \vec{c}$ であるから,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + k\vec{a}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + k|\vec{a}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 + 10k = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{4}{5}$$

である。また,

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{b} - \frac{4}{5}\vec{a} \\ &= (1, 5) - \frac{4}{5}(3, 1) \\ &= \left(-\frac{7}{5}, \frac{21}{5}\right) \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \left(4, -\frac{1}{3}\right) = \left(3m - \frac{7}{5}n, m + \frac{21}{5}n\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - \frac{7}{5}n = 4 \\ m + \frac{21}{5}n = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (m, n) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{5}{14}\right)$$

であるから,

$$\vec{d} = \frac{7}{6}\vec{a} - \frac{5}{14}\vec{c}$$

となる。

- (1) $\boxed{\text{ア}}$ 3 $\boxed{\text{イ}}$ 2 $\boxed{\text{ウ}}$ 3 $\boxed{\text{エ}}$ 1 $\boxed{\text{オ}}$ 3
 $\boxed{\text{カ}}$ 2 $\boxed{\text{キ}}$ 3
- (2) $\boxed{\text{ク}}$ 1 $\boxed{\text{ケ}}$ 7 $\boxed{\text{コ}}$ 6 $\boxed{\text{サ}}$ 7 $\boxed{\text{シ}}$ 6
 $\boxed{\text{ス}}$ 6 $\boxed{\text{セ}}$ 1 $\boxed{\text{ソ}}$ 0 $\boxed{\text{タ}}$ 7
- (3) $\boxed{\text{チ}}$ 1 $\boxed{\text{ツ}}$ 3 $\boxed{\text{テ}}$ 1 $\boxed{\text{ト}}$ 3

【解説】

(1)

$x = \frac{\pi}{12}$ のとき,

$$\begin{aligned} y &= 3 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。また, $x = \frac{5}{6}\pi$ のとき,

$$\begin{aligned} y &= 3 \sin \frac{5}{3}\pi + 2 \cos \frac{5}{3}\pi \\ &= 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{7}$$

$$\sin x \cos x = \tan x \cos^2 x = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{\sqrt{6}}{7}$$

であるから,

$$\begin{aligned} y &= 3 \sin 2x + 2 \cos 2x \\ &= 6 \sin x \cos x + 2(2 \cos^2 x - 1) \\ &= 6 \cdot \frac{\sqrt{6}}{7} + 2 \left(2 \cdot \frac{1}{7} - 1 \right) \\ &= \frac{6\sqrt{6} - 10}{7} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} y &= 3 \sin 2x + 2 \cos 2x \\ &= \sqrt{13} \sin(2x + \theta) \end{aligned}$$

である。ただし θ は $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ を満たす実数である。したがって,

x が実数全体を動くとき,

$$-\sqrt{13} \leq y \leq \sqrt{13}$$

となる。

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \\
 \Leftrightarrow \frac{4}{x} &= -\frac{1}{10}x^2 + x + \frac{2}{5} \\
 \Leftrightarrow x^3 - 10x^2 - 4x + 40 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)(x-10) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= -2, 2, 10
 \end{aligned}$$

であるから、第1象限における点(2, 2)以外の共有点の x 座標は、

$$x=10$$

となる。

(答) $x=10$

(2)

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2}$$

であるから、直線 ℓ の傾きは、

$$f'(2\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}$$

である。したがって、点Pの x 座標は、

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= -\frac{1}{3} \\
 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}x + 1 &= -\frac{1}{3} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{20}{3}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $x = \frac{20}{3}$

(3)

図形 D の面積を S とすると、

$$\begin{aligned}
 S &= \int_2^{10} \left\{ \left(-\frac{1}{10}x^2 + x + \frac{2}{5} \right) - \frac{4}{x} \right\} dx \\
 &= \left[-\frac{1}{30}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}x - 4\log|x| \right]_2^{10} \\
 &= \left(-\frac{100}{3} + 50 + 4 - 4\log 10 \right) - \left(-\frac{4}{15} + 2 + \frac{4}{5} - 4\log 2 \right) \\
 &= \frac{272}{15} - 4\log 5
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{272}{15} - 4\log 5$

(4)

[1] $n=2$ のとき

$$f(2) = g(2) = 2, \log 2 = 0.693$$

であるから、

$$\log 2 < f(2) = g(2)$$

である。したがって、点 $(2, \log 2)$ は図形 D 内に含まれない。

[2] $n=4$ のとき

$$f(4) = 1, g(4) = \frac{14}{5}, \log 4 = 2\log 2 = 1.386$$

であるから、

$$f(4) < \log 4 < g(4)$$

である。したがって、点 $(4, \log 4)$ は図形 D 内に含まれる。

[3] $n=6$ のとき

$$f(6) = \frac{2}{3}, g(6) = \frac{14}{5}, \log 6 = \log 2 + \log 3 = 1.792$$

であるから、

$$f(6) < \log 6 < g(6)$$

である。したがって、点 $(6, \log 6)$ は図形 D 内に含まれる。

[4] $n=8$ のとき

$$f(8) = \frac{1}{2}, g(8) = 2, \log 8 = 3\log 2 = 2.079$$

であるから、

$$f(8) < g(8) < \log 8$$

である。したがって、点 $(8, \log 8)$ は図形 D 内に含まれない。

[5] $n=10$ のとき

$$f(10) = g(10) = \frac{2}{5}, \log 10 = \log 2 + \log 5 = 2.302$$

であるから、

$$f(10) = g(10) < \log 10$$

である。したがって、点 $(10, \log 10)$ は図形 D 内に含まれない。

以上[1]～[5]より、求める点は、

$$(4, \log 4), (6, \log 6)$$

となる。

(答) $(4, \log 4), (6, \log 6)$

(1)

辺 BC の中点を O , 辺 B_1C_1 の中点を O_1 とおく。

$$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であるから,

$$AO:BC = AO_1:B_1C_1$$

$$\Leftrightarrow h:\ell = (h-a_1):a_1$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{\ell h}{\ell + h}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a_1 = \frac{\ell h}{\ell + h}$$

(2)

①より,

$$BC:P_1Q_1 = B_1C_1:P_2Q_2$$

$$\Leftrightarrow \ell:a_1 = a_1:a_2$$

$$\Leftrightarrow a_2 = \frac{a_1^2}{\ell} = \frac{\ell h^2}{(\ell + h)^2}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{\ell h^2}{(\ell + h)^2}$$

(3)

$n=2, 3, \dots$ に対して,

$$\triangle AB_{n-1}C_{n-1} \sim \triangle AB_nC_n$$

であるから,

$$B_{n-1}C_{n-1}:P_nQ_n = B_nC_n:P_{n+1}Q_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow a_{n-1}:a_n = a_n:a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

となる。この関係式を繰り返し用いると,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \cdots = \frac{a_2}{a_1} = \frac{h}{\ell + h}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{h}{\ell + h} \quad (n=2, 3, \dots)$$

(4)

(1), (3)より, $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = \frac{\ell h}{\ell + h}$, 公比 $\frac{h}{\ell + h}$ の等比数列であることが分かる。

よって,

$$a_n = \frac{\ell h}{\ell + h} \left(\frac{h}{\ell + h} \right)^{n-1} = \ell \left(\frac{h}{\ell + h} \right)^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \ell \left(\frac{h}{\ell + h} \right)^n$$

(5)

(4)より, $\ell=6, h=4$ のとき,

$$a_n = 6 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

である。よって,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \\ &= 36 \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{25} \right)^k \\ &= 36 \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{25} \right)^n}{1 - \frac{4}{25}} \\ &= \frac{48}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{4}{25} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

となるから,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{48}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{4}{25} \right)^n \right\} = \frac{48}{7}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{48}{7}$$