

〔解答〕

ア 1 イ 2 ウ 7 エ 4 オ 1

カ 1 キ 1 ク 6 ケ 1 コ 6

サ 2 シ 4 ス 3 セ 3 ソ 2

タ 2 チ 4 ツ 3 テ 1 ト 3

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \beta - \alpha &= \frac{4}{3}\alpha\beta\end{aligned}$$

である。ここで、 $\alpha\beta > 0$ より $\beta - \alpha > 0$ である。これを

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (\beta - \alpha)^2 + 2\alpha\beta &= 1\end{aligned}$$

に代入すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{3}\alpha\beta\right)^2 + 2\alpha\beta &= 1 \\ \Leftrightarrow (2\alpha\beta + 3)(8\alpha\beta - 3) &= 0\end{aligned}$$

となる。よって、 $\alpha\beta > 0$ から

$$\alpha\beta = \frac{3}{8}$$

となる。したがって

$$\beta - \alpha = \frac{4}{3}\alpha\beta = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

であり、また

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^2 &= (\beta - \alpha)^2 + 4\alpha\beta \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3}{8} \\ &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta^3 - \alpha^3 &= (\beta - \alpha)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \\ &= (\beta - \alpha)(1 + \alpha\beta) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{8}\right) \\ &= \frac{11}{16}\end{aligned}$$

である。

(2)

5 回目に表が出て、かつ表が出た回数が 1 回になるということは、1 回目から 4 回目が全て裏で、5 回目だけが表だということなので、

$$P_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{243}$$

を得る。

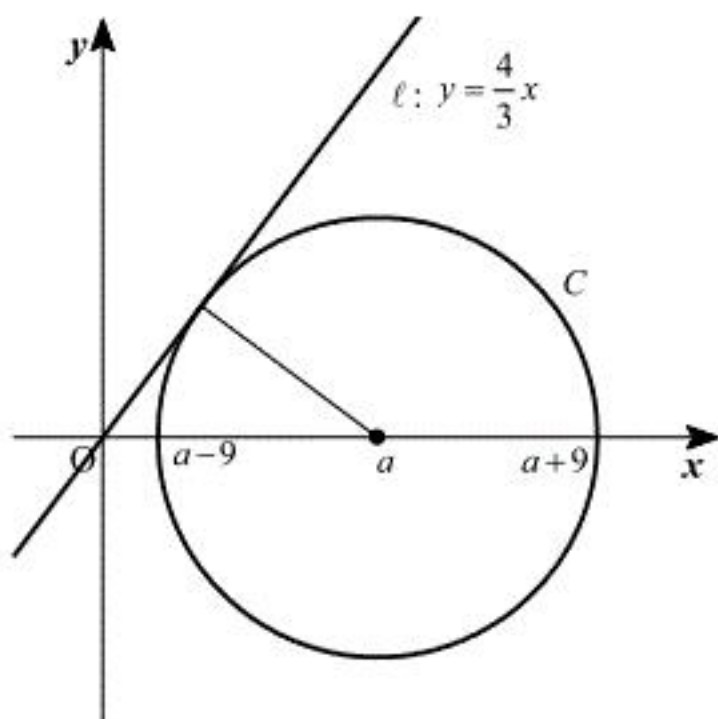
5 回目に表が出て、かつ表が出た回数が 2 回になるということは、1 回目から 4 回目のうちどこかで 1 回表が出て、5 回目にも表が出るということなので、

$$P_2 = {}_4C_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{32}{243}$$

を得る。

また、 $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$ は 5 回目に表が出る確率に他ならないので、その値は $\frac{1}{3}$ である。

(1)



円 C は中心の座標 $(a, 0)$ 、半径 9 の円であるから、円 C と直線 $\ell: y = \frac{4}{3}x \Leftrightarrow 4x - 3y = 0$ が

接するとき、点 $(a, 0)$ と直線 $4x - 3y = 0$ の距離が 9 であればよい。したがって、

$$\begin{aligned}\frac{|4 \cdot a - 3 \cdot 0|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} &= 9 \\ \Leftrightarrow |a| &= \frac{45}{4} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{45}{4} \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{45}{4}$$

(2)

円 C_1 の中心の座標を $(b, 0)$ 、半径を r とおく。 C_1 が ℓ, C の両方に接するには $b > 0$ が必要である。 C_1 と ℓ が接していることから、点 $(b, 0)$ と直線 $4x - 3y = 0$ の距離が r となるので、

$$\begin{aligned}\frac{|4b|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} &= r \\ \Leftrightarrow r &= \frac{4}{5}|b| \\ \Leftrightarrow r &= \frac{4}{5}b \quad (\because b > 0) \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。また、 C_1 と C が接していることから、

$$\left| b - \frac{45}{4} \right| = r + 9 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①、②より、 r を消去すると、

$$\begin{aligned}\left| b - \frac{45}{4} \right| &= \frac{4}{5}b + 9 \\ \Leftrightarrow b - \frac{45}{4} &= \pm \left(\frac{4}{5}b + 9 \right)\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}b - \frac{45}{4} &= \frac{4}{5}b + 9 \Leftrightarrow b = \frac{405}{4} \\ b - \frac{45}{4} &= -\left(\frac{4}{5}b + 9 \right) \Leftrightarrow b = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

より、 $b = \frac{405}{4}, \frac{5}{4}$ となる。また、①より

$$b = \frac{405}{4} \text{ のとき } r = 81$$

$$b = \frac{5}{4} \text{ のとき } r = 1$$

である。したがって、円 C_1 の中心の座標は $\left(\frac{405}{4}, 0 \right)$ 、半径は 81、または中心の座標は

$\left(\frac{5}{4}, 0 \right)$ 、半径は 1 となる。

$$(\text{答}) \quad \text{中心の座標} \left(\frac{405}{4}, 0 \right), \text{半径 } 81, \text{または中心の座標} \left(\frac{5}{4}, 0 \right), \text{半径 } 1$$

(1)

$$f'(x) = x^2 - s^2 = (x-s)(x+s)$$

である。

[1] $s \leq -2, 2 \leq s$ のとき

$0 \leq x \leq 2$ においては常に $f'(x) \leq 0$ が成り立つから、この区間で $f(x)$ は単調減少する。
したがって $f(x)$ は $x=2$ において最小値 $g(s)$ をとる。したがって

$$\begin{aligned} g(s) &= f(2) \\ &= \frac{8}{3} - 2s^2 + 2s^2 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。

[2] $-2 < s < 0$ のとき

$0 \leq x \leq 2$ における増減表は次のようになる。

x	0	...	$-s$	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって

$$\begin{aligned} g(s) &= f(-s) \\ &= \frac{2}{3}s^3 + 2s^2 \end{aligned}$$

である。

[3] $s=0$ のとき

$0 \leq x \leq 2$ において常に $f'(x) \geq 0$ が成り立つから、この区間で $f(x)$ は単調増加する。
したがって $f(x)$ は $x=0$ において最小値 $g(s)=0$ をとる。

[4] $0 < s < 2$ のとき

$0 \leq x \leq 2$ における増減表は次のようになる。

x	0	...	s	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって

$$\begin{aligned} g(s) &= f(s) \\ &= -\frac{2}{3}s^3 + 2s^2 \end{aligned}$$

である。

以上[1]～[4]より、

$$g(s) = \begin{cases} \frac{8}{3} & (s \leq -2 \text{ のとき}) \\ \frac{2}{3}s^3 + 2s^2 & (-2 < s \leq 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{2}{3}s^3 + 2s^2 & (0 < s < 2 \text{ のとき}) \\ \frac{8}{3} & (2 \leq s \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \ g(s) = \begin{cases} \frac{8}{3} & (s \leq -2 \text{ のとき}) \\ \frac{2}{3}s^3 + 2s^2 & (-2 < s \leq 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{2}{3}s^3 + 2s^2 & (0 < s < 2 \text{ のとき}) \\ \frac{8}{3} & (2 \leq s \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

[1] $s \leq -2, 2 \leq s$ のとき

$$g(s) = \frac{8}{3} \quad (\text{定数関数})$$

である。

[2] $-2 < s \leq 0$ のとき

$$g'(s) = 2s^2 + 4s = 2s(s+2)$$

であるから増減表は次のようになる。

s	-2	...	0
$g'(s)$	0	-	0
$g(s)$		$\searrow$	

となる。

[3] $0 < s < 2$ のとき

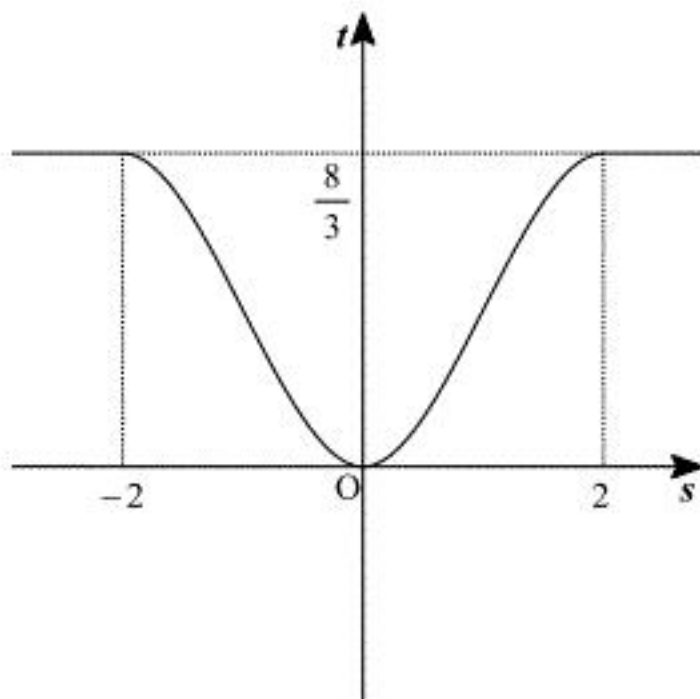
$$g'(s) = -2s^2 + 4s$$

であるから増減表は次のようになる。

s	0	...	2
$g'(s)$	0	+	0
$g(s)$		$\nearrow$	

となる。

以上[1]～[3]より、 $t=g(s)$ のグラフは下図のようになる。



(答) 上図