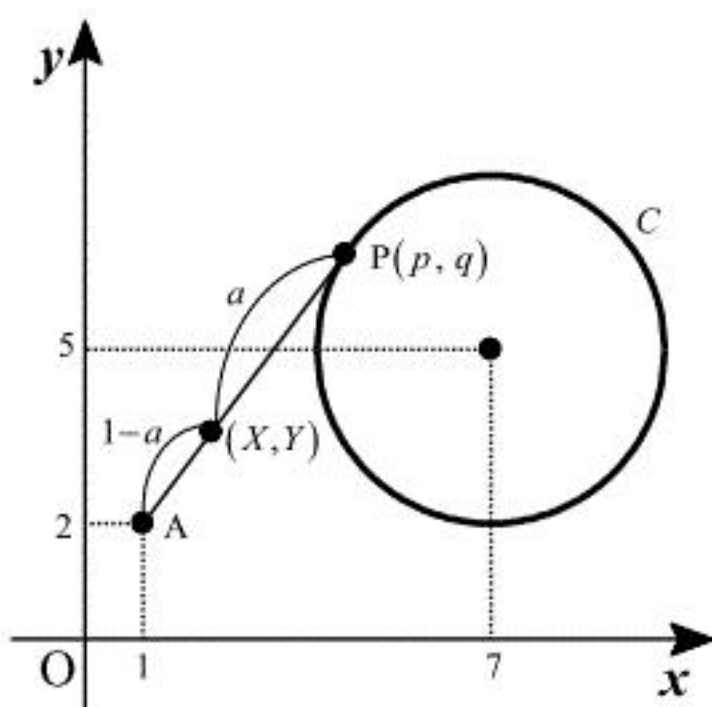


(1)



点 $P(p, q)$ とすると、点 P は円 C 上にあるので、

$$(p-7)^2 + (q-5)^2 = 9 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、 D 上の点を (X, Y) とすると、点 (X, Y) は線分 AP を $1-a:a$ に内分するので、

$$\begin{cases} X = (1-a)p + a \cdot 1 \\ Y = (1-a)q + a \cdot 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{X-a}{1-a} \\ q = \frac{Y-2a}{1-a} \end{cases} \quad (\because 1-a \neq 0)$$

である。これを①に代入すると、

$$\left(\frac{X-a}{1-a} - 7 \right)^2 + \left(\frac{Y-2a}{1-a} - 5 \right)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (X+6a-7)^2 + (Y+3a-5)^2 = 9(1-a)^2$$

である。よって、 D の方程式は、

$$(x+6a-7)^2 + (y+3a-5)^2 = 9(1-a)^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad (x+6a-7)^2 + (y+3a-5)^2 = 9(1-a)^2$$

(2)

D は中心 $(-6a+7, -3a+5)$ 、半径 $3(1-a)$ の円であり、

C は中心 $(7, 5)$ 、半径 3 の円である。

したがって、この 2 つの円が異なる 2 点で交わる条件は、

$$|3-3(1-a)| < \sqrt{\{7-(-6a+7)\}^2 + \{5-(-3a+5)\}^2} < 3+3(1-a)$$

$$\Leftrightarrow |3a| < \sqrt{45a^2} < 6-3a$$

$$\Leftrightarrow a < \sqrt{5}a < 2-a \quad (\because a > 0)$$

が成り立つことである。ここで、 $0 < a < 1$ より、 $a < \sqrt{5}a$ は常に成り立つので、

$$\sqrt{5}a < 2-a$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5}+1)a < 2$$

$$\Leftrightarrow a < \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

である。したがって、 $0 < a < 1$ と合わせると、求める a の範囲は、

$$0 < a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 < a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(3)

円 C の方程式を変形すると、

$$(x-7)^2 + (y-5)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 14x - 10y + 65 = 0$$

であり、円 D の方程式を変形すると、

$$(x+6a-7)^2 + (y+3a-5)^2 = 9(1-a)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (12a-14)x + (6a-10)y + 36a^2 - 96a + 65 = 0$$

である。したがって、円 C と円 D の異なる 2 つの交点を通る直線または円の方程式は、実数 k を用いて、

$$x^2 + y^2 - 14x - 10y + 65$$

$$+ k\{x^2 + y^2 + (12a-14)x + (6a-10)y + 36a^2 - 96a + 65\} = 0$$

と表すことができる。(ただし、 $(x+6a-7)^2 + (y+3a-5)^2 = 9(1-a)^2$ を除く。)

特に、 $k=-1$ のとき直線を表すので、円 C と円 D の異なる 2 つの交点を通る直線の方程式は、

$$x^2 + y^2 - 14x - 10y + 65$$

$$- \{x^2 + y^2 + (12a-14)x + (6a-10)y + 36a^2 - 96a + 65\} = 0$$

$$\Leftrightarrow -12ax - 6ay - 36a^2 + 96a = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y + 6a - 16 = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2x + y + 6a - 16 = 0$$

(1)

$$\begin{aligned}
 A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a+2b \\ 2a+4b \end{pmatrix} \\
 &= (a+2b) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

である。これを繰り返し用いると、

$$\begin{aligned}
 A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= A^{n-1} A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= (a+2b) A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \cdots \\
 &= (a+2b)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

が示される。よって、

$$s_n = (a+2b)^n, t_n = 2(a+2b)^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad s_n = (a+2b)^n, \quad t_n = 2(a+2b)^n$$

(2)

$$\begin{aligned}
 A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a-b \\ -a+b \end{pmatrix} \\
 &= (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

であるから、(1)と同様に考えて

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (a-b)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が示される。よって、

$$u_n = (a-b)^n, v_n = -(a-b)^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad u_n = (a-b)^n, \quad v_n = -(a-b)^n$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha - \beta = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

であるから、連立方程式を解いて

$$\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}$$

(4)

(1),(2),(3)の答を用いて計算すると、

$$\begin{aligned}
 A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= A^n \cdot \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + A^n \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} (a+2b)^n \\ 2(a+2b)^n \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (a-b)^n \\ -(a-b)^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 w_n &= \frac{2}{3}(a+2b)^n + \frac{1}{3}(a-b)^n \\
 x_n &= \frac{4}{3}(a+2b)^n - \frac{1}{3}(a-b)^n
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} w_n = \frac{2}{3}(a+2b)^n + \frac{1}{3}(a-b)^n \\ x_n = \frac{4}{3}(a+2b)^n - \frac{1}{3}(a-b)^n \end{cases}$$

(1)

まず p を求める。

1 から m までの自然数 s に対し、 $X=s$ となる場合を考える。

$X=s$ となる確率は $\frac{1}{m}$ である。

また、このとき $Y=1, 2, \dots, s-1 (< n)$ となれば $X>Y$ が成り立ち、この確率は $\frac{s-1}{n}$ である。

よって、 $X=s$ となり、かつ $X>Y$ となる確率は、

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{s-1}{n} = \frac{s-1}{mn}$$

である。したがって、求める確率 p は、これを全ての s について足しあわせたものであり、

$$\begin{aligned} p &= \sum_{s=1}^m \frac{s-1}{mn} \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{s=1}^m (s-1) \\ &= \frac{1}{mn} \cdot \frac{m(m-1)}{2} \\ &= \frac{m-1}{2n} \end{aligned}$$

である。

次に q を求める。同様に、 $X=s$ となる場合を考える。

$X=s$ となる確率は $\frac{1}{m}$ である。

また、このとき $Y=s (< n)$ となれば $X=Y$ が成り立ち、この確率は $\frac{1}{n}$ である。

よって、 $X=s$ となり、かつ $X=Y$ となる確率は、

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{mn}$$

である。したがって、求める確率 q は、これを全ての s について足しあわせたものであり、

$$\begin{aligned} q &= \sum_{s=1}^m \frac{1}{mn} \\ &= \frac{m}{mn} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

である。

最後に r を求める。

X, Y の大小関係は $X>Y, X=Y, X<Y$ の 3 通りしかないので、 $p+q+r=1$ が成り立ち、

$$\begin{aligned} r &= 1 - (p+q) \\ &= 1 - \left(\frac{m-1}{2n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 - \frac{m+1}{2n} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{m-1}{2n}, \quad q = \frac{1}{n}, \quad r = 1 - \frac{m+1}{2n}$$

(2)

$k-1$ 回目の試行までは $X<Y$ にならず、 k 回目の試行で $X<Y$ となればよい。

各回の試行で $X<Y$ となる確率は r であり、 $X<Y$ にならない確率は $1-r$ であるから、

$$\begin{aligned} T_k &= (1-r)^{k-1} \cdot r \\ &= r(1-r)^{k-1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad T_k = r(1-r)^{k-1}$$

(3)

(2) の答より、 k の値に関係なく、

$$r(1-r)^{k-1} = 6(1-r)^{k+1}$$

が成り立てばよい。これを解くと、

$$\begin{aligned} r(1-r)^{k-1} &= 6(1-r)^{k+1} \\ \Leftrightarrow r &= 6(1-r)^2 \quad (\because 1-r \neq 0) \\ \Leftrightarrow 6r^2 - 13r + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2r-3)(3r-2) &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 $0 < r < 1$ であることに注意すると、

$$r = \frac{2}{3}$$

である。よって、(1) の答より、求める m, n の関係は、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{m+1}{2n} &= \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow n &= \frac{3(m+1)}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad n = \frac{3(m+1)}{2}$$

(4)

$T_k = r(1-r)^{k-1}$ であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell} T_k &= \sum_{k=1}^{\ell} r(1-r)^{k-1} \\ &= r \sum_{k=1}^{\ell} (1-r)^{k-1} \\ &= r \cdot \frac{1-(1-r)^{\ell}}{1-(1-r)} \\ &= 1-(1-r)^{\ell} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^{\ell} T_k = 1-(1-r)^{\ell}$$