

〔解答〕

ア 1 イ 2 ウ 7 エ 4 オ 1

カ 1 キ 1 ク 6 ケ 1 コ 6

サ 2 シ 4 ス 3 セ 3 ソ 2

タ 2 チ 4 ツ 3 テ 1 ト 3

〔解説〕

(1)

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \beta - \alpha = \frac{4}{3}\alpha\beta$$

である。ここで、 $\alpha\beta > 0$ より $\beta - \alpha > 0$ である。これを

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (\beta - \alpha)^2 + 2\alpha\beta = 1$$

に代入すると

$$\left(\frac{4}{3}\alpha\beta\right)^2 + 2\alpha\beta = 1$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha\beta + 3)(8\alpha\beta - 3) = 0$$

となる。よって、 $\alpha\beta > 0$ から

$$\alpha\beta = \frac{3}{8}$$

となる。したがって

$$\beta - \alpha = \frac{4}{3}\alpha\beta = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

であり、また

$$(\alpha + \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2 + 4\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3}{8}$$

$$= \frac{7}{4}$$

$$\beta^3 - \alpha^3 = (\beta - \alpha)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$= (\beta - \alpha)(1 + \alpha\beta)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{8}\right)$$

$$= \frac{11}{16}$$

である。

(2)

5 回目に表が出て、かつ表が出た回数が 1 回になるということは、1 回目から 4 回目が全て裏で、5 回目だけが表だということなので、

$$P_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{243}$$

を得る。

5 回目に表が出て、かつ表が出た回数が 2 回になるということは、1 回目から 4 回目のうちどこかで 1 回表が出て、5 回目にも表が出るということなので、

$$P_2 = {}_4C_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{32}{243}$$

を得る。

また、 $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$ は 5 回目に表が出る確率に他ならないので、その値は $\frac{1}{3}$ である。

(1)

与式を微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\cos^3 x \cdot (-\sin x) + 12\sin^3 x \cos x \\ &= -4\sin x \cos^3 x + 12\sin^3 x \cos x \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = -4\sin x \cos^3 x + 12\sin^3 x \cos x$$

(2)

(1)の答を用いると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\sin x \cos x (3\sin^2 x - \cos^2 x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\sin x \cos x (4\sin^2 x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\sin x \cos x (2\sin x + 1)(2\sin x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x = 0, \cos x = 0, \sin x = \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲における解は,

$$x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$$

(3)

 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$\sin x \geq 0, \cos x \geq 0, 2\sin x + 1 > 0$$

であるから,

$$f'(x) = 4\sin x \cos x (2\sin x + 1)(2\sin x - 1)$$

の正負は、 $(2\sin x - 1)$ の正負に等しい。よって、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ のとき

$$f'(x) \leq 0$$

であり、 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$f'(x) \geq 0$$

である。よって,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(x)| dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{6}} f'(x) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx \\ &= -[f(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} + [f(x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\left(\frac{3}{4} - 1\right) + \left(3 - \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{2}$$

3

(1)

$$f'(x) = x^2 - s^2 = (x-s)(x+s)$$

である。

[1] $s \leq -2, 2 \leq s$ のとき

$0 \leq x \leq 2$ においては常に $f'(x) \leq 0$ が成り立つから、この区間で $f(x)$ は単調減少する。
したがって $f(x)$ は $x=2$ において最小値 $g(s)$ をとる。したがって

$$\begin{aligned} g(s) &= f(2) \\ &= \frac{8}{3} - 2s^2 + 2s^2 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。

[2] $-2 < s < 0$ のとき

$0 \leq x \leq 2$ における増減表は次のようになる。

x	0	...	$-s$	...	2
$f'(x)$		$\square$	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって

$$\begin{aligned} g(s) &= f(-s) \\ &= \frac{2}{3}s^3 + 2s^2 \end{aligned}$$

である。

[3] $s=0$ のとき

$0 \leq x \leq 2$ において常に $f'(x) \geq 0$ が成り立つから、この区間で $f(x)$ は単調増加する。
したがって $f(x)$ は $x=0$ において最小値 $g(s)=0$ をとる。

[4] $0 < s < 2$ のとき

$0 \leq x \leq 2$ における増減表は次のようになる。

x	0	...	s	...	2
$f'(x)$		$\square$	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって

$$\begin{aligned} g(s) &= f(s) \\ &= -\frac{2}{3}s^3 + 2s^2 \end{aligned}$$

である。

以上[1]～[4]より、

$$g(s) = \begin{cases} \frac{8}{3} & (s \leq -2 \text{ のとき}) \\ \frac{2}{3}s^3 + 2s^2 & (-2 < s \leq 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{2}{3}s^3 + 2s^2 & (0 < s < 2 \text{ のとき}) \\ \frac{8}{3} & (2 \leq s \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$g(s) = \begin{cases} \frac{8}{3} & (s \leq -2 \text{ のとき}) \\ \frac{2}{3}s^3 + 2s^2 & (-2 < s \leq 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{2}{3}s^3 + 2s^2 & (0 < s < 2 \text{ のとき}) \\ \frac{8}{3} & (2 \leq s \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

[1] $s \leq -2, 2 \leq s$ のとき

$$g(s) = \frac{8}{3} \quad (\text{定数関数})$$

である。

[2] $-2 < s \leq 0$ のとき

$$g'(s) = 2s^2 + 4s = 2s(s+2)$$

であるから増減表は次のようになる。

s	-2	...	0
$g'(s)$	0	-	0
$g(s)$		$\searrow$	

となる。

[3] $0 < s < 2$ のとき

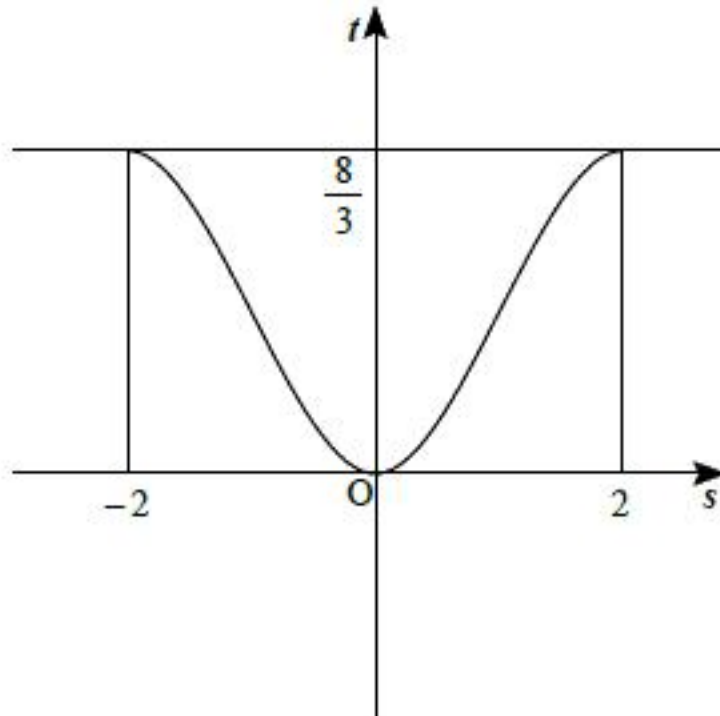
$$g'(s) = -2s^2 + 4s$$

であるから増減表は次のようになる。

s	0	...	2
$g'(s)$	0	+	0
$g(s)$		$\nearrow$	

となる。

以上[1]～[3]より、 $t = g(s)$ のグラフは下図のようになる。



(答) 上図