

Q 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の (1) から (3) において、 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートにマークせよ。また、 内の (あ) から (お) には、解答群の中からあてはまるものを選び、その番号を解答用マークシートにマークせよ。ただし、 は 2桁の数^{ひた}を表す。また、ウ は既出の ウ を表す。

(30 点)

(1) 1 と書かれたカード、10 と書かれたカード、100 と書かれたカードの 3 種類のカードがある。与えられた自然数 m に対し、これらの 3 種類のカードから何枚か選んで、選ばれたカードに書かれた数字の合計がちょうど m になるようにする方法について考える。ただし、それぞれの種類のカードは何枚でも使用できるものとする。

たとえば、 $m = 11$ とすると、そのようにカードを選ぶ方法は、

「1 と書かれたカードを 1 枚と、10 と書かれたカードを 1 枚選ぶ」

か、または

「1 と書かれたカードを 11 枚選ぶ」

かの 2 通りある。次の問いに答えよ。

(a) 合計がちょうど 100 になるようにカードを選ぶ方法は ア イ 通りある。

(b) 自然数 n に対して、合計がちょうど $100n$ になるようにカードを選ぶ方法が a_n 通りあるとする。 $n \geq 2$ のとき、この方法のうちで、100 と書かれたカードを少なくとも 1 枚使用するような方法は $a_n - \text{ウ}$ 通りあるので、

$$a_n = \text{エ} a_{n-\text{ウ}} + \text{オカ} n + \text{キ} \quad (n \geq 2)$$

が成り立つ。よって $a_n = \text{ク} n^2 + \text{ケ} n + \text{コ}$ となる。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

- (2) A, B は実数を成分とする 2 次の正方行列とし, O, E はそれぞれ 2 次の零行列, 単位行列とする。

次の (あ) ~ (お) にあてはまるものを, 下の 1~4 のうちから 1 つずつ選べ。
ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。

- (a) $A = O$ は $A^2 = O$ であるための (あ)。
(b) $AB = O$ は $BA = O$ であるための (い)。
(c) $AB = E$ は $BA = E$ であるための (う)。
(d) すべての自然数 n に対して $A^n \neq O$ であることは, A の逆行列が存在するための (え)。
(e) $A^n = E$ となる自然数 n が存在することは, A の逆行列が存在するための (お)。

(あ), (い), (う), (え), (お) の解答群

- 1 必要十分条件である
- 2 必要条件であるが, 十分条件でない
- 3 十分条件であるが, 必要条件でない
- 4 必要条件でも十分条件でもない

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(3) 以下で対数は自然対数とする。

$$(a) \int x \log x \, dx = \frac{1}{\boxed{\text{サ}}} x^{\boxed{\text{シ}}} \log x - \frac{1}{\boxed{\text{ス}}} x^{\boxed{\text{セ}}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(b) $x > 0$ のとき, 不等式 $\log x < x$ が成り立つ。この不等式で x の代わりに $\sqrt{x}$ を代入した不等式を利用すると, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \boxed{\text{ソ}}$ が得られる。

また, これより $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \boxed{\text{タ}}$ も得られる。

$$(c) \int_a^b (x-a)(x-b) \, dx = -\frac{(b-a)^{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{7}{3}, \quad a_{n+1} = (a_n - 2)^2 + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。また、自然数 n に対し、関数 $f_n(x)$, $g_n(x)$ を

$$f_n(x) = x^2 + (1 - 2a_n)x + a_n^2 - a_{n+1}, \quad g_n(x) = |f_n(x)|$$

と定める。次の問いに答えよ。

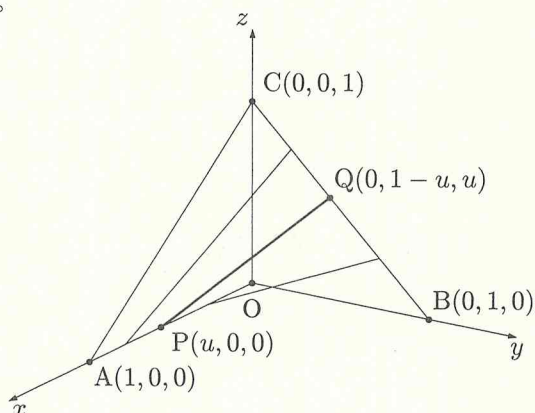
(35 点)

- (1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は 2 とは異なる解 b_n をもつ。 b_n を a_n を用いて表せ。
- (2) 一般項 a_n および $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。
- (3) b_n と 2 ではどちらが大きいのか、理由も含めて答えよ。
- (4) 正の実数 t に対して、 l_t は直線 $y = -t(x - 2)$ を表すとする。
- (a) 直線 l_t と曲線 $y = g_n(x)$ の共有点が、すべての自然数 n に対して 2 個であるという。 t の値の範囲を求めよ。
- (b) (a) で求めた範囲における t の最小値を T とする。直線 l_T と曲線 $y = g_n(x)$ で囲まれた部分の面積を S_n とするとき、 S_n を b_n を用いて表せ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。 必要ならば、**1** (3) の結果を使ってもよい。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

- 3** O を原点とする座標空間内に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ があり, 下図のように, 実数 u ($0 \leq u \leq 1$) に対して, 2 点 $P(u, 0, 0)$, $Q(0, 1-u, u)$ をとる。次の問いに答えよ。 (35 点)



- (1) 実数 t ($0 \leq t \leq 1$) に対して, 線分 PQ を $t : (1-t)$ に内分する点を $R(x, y, z)$ とする。ただし, $t = 0, 1$ のとき, 点 R はそれぞれ点 P, Q であるとする。
- (a) x, y, z を u と t を用いて表せ。
- (b) $z \neq 0$ のとき, y を x と z のみの (u, t を含まない) 式で表せ。
- (c) (b) で求めた式を $f(x, z)$ とし, 実数 c ($0 < c \leq 1$) に対して, $g(x) = f(x, c)$ とおく。 xy 平面上の曲線 $y = g(x)$ ($x \geq 0$) と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を S とおくと, S を c を用いて表せ。ただし, $c = 1$ のときは $S = 0$ とする。
- (2) u が 0 から 1 まで動くとき, 点 P は O から A まで, 点 Q は B から C まで動き, 線分 PQ が通過してできる図形は, ある曲面になる。この曲面と yz 平面および zx 平面で囲まれた立体 K の体積 V を計算しよう。
- (1)(c) で求めた S は, z 軸に垂直な平面 $z = c$ による立体 K の切り口の面積である。実数 h ($0 < h < 1$) に対して, K のうち 2 平面 $z = h, z = 1$ の間にある部分の体積を $v(h)$ とするとき, K の体積 V は, $V = \lim_{h \rightarrow +0} v(h)$ により計算される。 V の値を求めよ。 必要ならば, **1** (3) の結果を使ってもよい。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。