

Q 2 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 2 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科・受験番号を記入してください。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものが採点されます。
- (4) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (5) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

1 実数 x に対し, $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す。次の問いに答えよ。 (50 点)

(1) k, t を自然数とすると、 $[\sqrt{k}] = t$ となるような k のとり得る値の範囲を、 t を用いた不等式で表せ。

(2) n を自然数とし、和

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2[\sqrt{k}] + 1}$$

が自然数となるような n の値を、小さい順に並べて、 $a_1, a_2, a_3, \dots$ と定める。

(a) a_1, a_2 の値を求めよ。

(b) 自然数 m に対して、 a_m および

$$\sum_{k=1}^{a_m} \frac{1}{2[\sqrt{k}] + 1}$$

を m を用いて表せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2[\sqrt{k}] + 1}$ を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 実数 a, b ($b \geq 0$) に対し, x の 2 次式 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = x^2 + bx + a^2, \quad g(x) = x^2 + 2\sqrt{b}x + 1$$

で定め, $F(x) = f(g(x))$ とする。このとき, 4 次方程式 $F(x) = 0$ の実数解について考える。次の問いに答えよ。 (50 点)

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表せ。
- (2) 方程式 $F(x) = 0$ が実数解をもつならば, 方程式 $f(x) = 0$ も実数解をもつ。
その理由を簡単に説明せよ。
- (3) 方程式 $F(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表せ。また, その条件を満たす点 (a, b) 全体の集合を D とするとき, D を ab 平面上に図示せよ。
- (4) 点 (a, b) が (3) で定めた集合 D 上を動くとき, 方程式 $F(x) = 0$ のただ 1 つの実数解のとり得る値の範囲を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。