

C 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の (1), (2), (3) においては, 内の 1 つのカタカナに 0 から 9 までの数字が 1 つあてはまる。その数字を解答用マークシートにマークしなさい。与えられた枠数より少ない桁の数があてはまる場合は, 上位の桁を 0 とし, 右に詰めた数値としなさい。分数は既約分数とし, 値が整数の場合は分母を 1 としなさい。根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

(50 点)

(1) a を実数の定数として, $f(x) = 2a \tan x - \tan^2 x - 2a$ とおく。

(a) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ を満たすすべての実数 x に対して, $f(x) < 1$ が常に成り立つとき, a のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}} < a < \boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

(b) $0 < x < \frac{\pi}{4}$ を満たすすべての実数 x に対して, $f(x) < 1$ が常に成り立つとき, a のとりうる値の範囲は

$$a \geq -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

右のページは白紙です。

(2) すべての実数 x の値において微分可能な関数 $f(x)$ は次の 2 条件を満たすものとする。

• すべての実数 x, y に対して $f(x+y) = f(x) + f(y) + 8xy$

• $f'(0) = 3$

ここで、 $f'(a)$ は関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数である。

以下の問いに答えなさい。

(a) $f(0) =$ ア

(b) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} =$ イ

(c) $f'(1) =$ ウ エ , $f'(-1) = -$ オ

(d) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\text{カ} \text{キ}}{\text{ク}}$

右のページは白紙です。

- (3) 面積が1である $\triangle OAB$ の辺 OA 上に点 M , 辺 OB 上に点 N をとり, 線分 AN と線分 BM の交点を P として $\triangle PMN$ の面積について考える。 $\triangle OMN$ の面積が $\frac{1}{3}$ のとき, $s = \frac{OM}{OA}$ として, 以下の問いに答えなさい。

(a) $\triangle PMN$ の面積は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} - \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} s - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \cdot \frac{1}{s}$ である。

- (b) $\triangle OMN$ の面積が $\frac{1}{3}$ という条件を満たしながら, M, N が動くとき,

$\triangle PMN$ の面積が最大になるのは $s = \frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のときである。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は解答用紙 2 に記入しなさい。

2 以下の問いに答えなさい。

(25 点)

(1) 座標平面において、 x 座標と y 座標がともに整数である点 (x, y) を格子点という。以下、条件

$$(*) \quad \log_3 y - \log_3 x \leq x \quad (\text{ただし } x > 0, y > 0)$$

を満たす格子点について考える。

(a) $x = 1$ かつ条件 $(*)$ を満たす格子点の個数を求めなさい。

(b) $x \leq 3$ かつ条件 $(*)$ を満たす格子点の個数を求めなさい。

(c) n を自然数とする。このとき、 $x \leq n$ かつ条件 $(*)$ を満たす格子点の個数を n を用いて表わしなさい。

(2) 曲線 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上の点 $\left(2, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ における接線の方程式を求めなさい。

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答は解答用紙 **3** に記入しなさい。

3 座標平面において、定点 $A(0, 1)$ と直線 $y = 3$ に対して、条件 $AP + d = 4$ を満たす点 P の軌跡を考える。ただし、 AP は 2 点 A, P 間の距離であり、 d は点 P と直線 $y = 3$ の距離である。

(25 点)

- (1) 点 P の軌跡を求めなさい。
- (2) 点 P の軌跡によって囲まれた部分の面積を求めなさい。
- (3) 直線 $y = x + m$ と点 P の軌跡が異なる 2 点で交わるとき、実数 m のとりうる値の範囲を求めなさい。
- (4) k を正の実数とすると、直線 $y = kx + 1$ と点 P の軌跡は異なる 2 点で交わる。これらの交点を B, C とするとき、線分 BC の長さを k を用いて表しなさい。