平成23年度　　　　　　　　　　　　　　　　〔試験時間　100分〕

# D 1　　　数　　　学

この冊子は，数学の問題で1ページより5ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し，さらに受験番号・志望学科をマークしてください。

(3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは横1行について1箇所に限ります。2箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の **(1)**, **(2)**, **(3)** においては, $\boxed{\phantom{ア}}$ 内の１つのカタカナに０から９までの数字が１つあてはまる。その数字を**解答用マークシート**にマークしなさい。与えられた枠数より少ない桁の数があてはまる場合は，上位の桁を０として，右に詰めた数値としなさい。分数は既約分数とし，値が整数の場合は分母を１としなさい。根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

(50 点)

**(1)** 座標平面において，点 $\mathrm{P}(x, y)$ が次の連立不等式

$$|x| \leqq 2, \quad |y| \leqq 2, \quad y \leqq -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

で表される領域内を動くとき，以下の問いに答えなさい。

**(a)** 点 P の座標が $\left(\boxed{ア}, -\boxed{イ}\right)$ のとき，$2|x| - 3|y|$ は最小値 $-\boxed{ウ}$ をとる。

**(b)** 点 P の座標が $\left(\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}, \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\right)$ のとき，$(x-1)^2 + (y-3)^2$ は最小値 $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ をとる。

**(c)** 点 P の座標が $\left(\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}, \dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}}\right)$ のとき，$2(x-1)^2 + (y-3)^2$ は最小値 $\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}}$ をとる。

**右のページは白紙です。**

(2) 投げたときに，表の出る確率と裏の出る確率が等しくない特殊な硬貨がある。ただし，表の出る確率と裏の出る確率はどちらも 0 でない。この硬貨を 4 回続けて投げたとき表がちょうど 1 回出る確率と，この硬貨を 4 回続けて投げたとき表がちょうど 2 回出る確率が等しい。以下の問いに答えなさい。

(a) この硬貨を 1 回投げたとき表が出る確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(b) この硬貨を 1 回投げ，表が出れば 3 点，裏が出れば 1 点が得られるゲームを行う。この硬貨を続けて 3 回投げたとき，得られる点数の和の期待値は $\dfrac{\boxed{ウ\ エ}}{\boxed{オ}}$ である。

右のページは白紙です。

(3) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$， $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。$\alpha$，$\beta$ が

$$3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 2\sin\alpha$$

を満たすとき，以下の問いに答えなさい。

(a) $\sin\alpha$ のとりうる値の範囲は

$$\boxed{ア} \leqq \sin\alpha \leqq \frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$$

である。

(b) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta$ のとりうる値の範囲は

$$\boxed{エ} \leqq \sin^2\alpha + \sin^2\beta \leqq \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$$

である。

(c) $-\sqrt{2}\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \sqrt{2}\cos^2\alpha$ のとりうる値の範囲は

$$\frac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}} + \sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}} \leqq -\sqrt{2}\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \sqrt{2}\cos^2\alpha \leqq \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$$

である。

**右のページは白紙です。**

問題 $\boxed{2}$ の解答は解答用紙 $\boxed{2}$ に記入しなさい。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えなさい。

(25 点)

**(1)** 行列 $A$ を，$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ により定める。

**(a)** $A^2 + aA + bE = O$ となる実数 $a$ , $b$ を求めなさい。ただし，$E$ は単位行列，$O$ は零行列である。

**(b)** $n$ を正の整数とするとき，$A^n$ を求めなさい。

**(2)** $t$ を媒介変数として，$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t^2} \end{cases}$ で表される曲線を $C$ とする。ここで，$e$ は自然対数の底である。

**(a)** $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を $t$ の式で表しなさい。

**(b)** 曲線 $C$ 上の $t = 1$ に対応する点における接線の方程式を求めなさい。

右のページは白紙です。

**問題 $\boxed{3}$ の解答は解答用紙 $\boxed{3}$ に記入しなさい。**

$\boxed{3}$ 座標平面において，2点 $(1,1)$, $(-1,3)$ を通る放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を考える。ただし，$a < 0$ とする。

(25点)

**(1)** 放物線の頂点Pの座標を $a$ を用いて表しなさい。

**(2)** 放物線と $x$ 軸との2つの交点A，Bおよび頂点Pより作られる△PABが正三角形になるような $a$ の値を求めなさい。また，そのときの三角形の1辺の長さを求めなさい。

**(3)** $a$ が $a < 0$ の範囲を動くとき，放物線と $x$ 軸によって囲まれる部分の面積が最小になるような $a$ の値を求めなさい。