

H 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から へ までに当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点)

(1) 1 辺の長さが 1 の正方形を A_1 とし、その各辺の中点を頂点とする正方形を A_2 、同様に A_2 の各辺の中点を頂点とする正方形を A_3 、以下、 A_k の各辺の中点を頂点とする正方形を A_{k+1} とし、正方形の列 $A_1, A_2, A_3, \dots$ を考える。

(i) A_1 から A_8 までの正方形の周囲の長さの和は $\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ア} & \text{イ} \\ \hline \end{array}}{4} \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{ウ} \\ \hline \end{array} + \sqrt{\begin{array}{|c|} \hline \text{エ} \\ \hline \end{array}} \right)$ である。

(ii) A_1 から A_8 までの正方形の面積の和は $\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{オ} & \text{カ} & \text{キ} \\ \hline \text{ク} & \text{ケ} & \text{コ} \\ \hline \end{array}}{\quad}$ である。

右のページは白紙です。

- (2) 1 から 9 までの 9 個の数字を考える。これらの数字の中から異なる 5 個の数字を取り出して 5 桁の正の整数 m を作る。

(i) m が偶数である確率は $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(ii) m の 1 桁目, 3 桁目, 5 桁目の数字は偶数で, 2 桁目, 4 桁目の数字は奇数である確率は $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}} \mid \boxed{\text{ソ}}}$ である。

なお, 1 桁目は一の位, 2 桁目は十の位, 3 桁目は百の位, …… を表す。

(iii) m が, 奇数の数字と偶数の数字が交互に並んだ整数となる確率は $\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}} \mid \boxed{\text{ツ}}}$ である。

(iv) m が 89823 より大きい整数である確率は $\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

右のページは白紙です。

(3) a, b を 0 でない実数として、行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -ab \\ a & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える。

(i) $AB = BA$ のとき $b = \boxed{\text{ナ}}$ である。

(ii) A^3 が単位行列 E の実数倍になるのは、 $a^2b = \boxed{\text{ニ}} \boxed{\text{ヌ}}$ のときであり、
このとき、

$$A^3 = -\boxed{\text{ネ}} \boxed{\text{ノ}} E$$

となる。

(iii) $AB = BA$ で A^3 が単位行列 E の実数倍であるとき、

$$(A+B)^3 + (A-B)^3 = -\boxed{\text{ハ}} \boxed{\text{ヒ}} \boxed{\text{フ}} E - \boxed{\text{ヘ}} A$$

となる。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 定数 a ($a < 1$), b, c に対し、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+b)x - a + c$$

と定める。曲線 $C: y = f(x)$ は点 $A(1, 3)$ を通り、点 A において直線 $\ell: y = 2x + 1$ と接しているとする。曲線 C と直線 ℓ の共有点のうち、点 A と異なる点を B とする。

- (1) b, c の値を求めよ。
- (2) 点 B の座標を a を用いて表せ。
- (3) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 S_1 を、 a を用いて表せ。
- (4) x が $a < x < 1$ の範囲を動くとき、3 点 $P(x, f(x)), A, B$ が作る三角形 PAB の面積の最大値を S_2 とする。 S_2 と、(3) で求めた面積 S_1 に対して、 $\frac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 3 の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 a, b は $0 < a < b$ を満たす正の実数として、定積分 I_1, I_2, I_3 を

$$I_1 = \int_a^b \sin(x^2) dx, \quad I_2 = \int_a^b \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx, \quad I_3 = \int_a^b \frac{\sin(x^2)}{x^4} dx$$

と定める。

- (1) $\int_a^b \sin(x^2) dx = \int_a^b \frac{1}{2x} \cdot 2x \sin(x^2) dx$ と変形してから部分積分法を利用することにより、 $I_1 + \frac{1}{2} I_2$ の値を、 a と b を用いて表せ。
- (2) $I_2 - \frac{3}{2} I_3$ の値を、 a と b を用いて表せ。
- (3) 正の整数 n に対して

$$K_n = \int_{\sqrt{2n\pi}}^{\sqrt{2(n+1)\pi}} \sin(x^2) dx + \frac{3}{4} \int_{\sqrt{2n\pi}}^{\sqrt{2(n+1)\pi}} \frac{\sin(x^2)}{x^4} dx$$

と定めるとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n\pi \sqrt{2n\pi} K_n$$

の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

