平成 23 年度　　〔試験時間　100 分〕

# G 1　　数　　学

この冊子は，数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し，さらに受験番号・志望学科をマークしてください。

(3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆（ＨＢまたはＢ）を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。

ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

以下の問題 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ において，$\boxed{\phantom{ア}}$ 内の**カタカナ**の1文字にあてはまる0から9までの数字を求めて，**解答用マークシート**の指定された欄にマークしなさい。ただし，分数は既約分数で表しなさい。なお，$\boxed{ア}$ のようなカタカナ1文字は1桁(けた)の数を表し，$\boxed{アイ}$ のようなカタカナ2文字は2桁の数を表すものとします。

## $\boxed{1}$ (17点)

2次関数 $f(x) = 9x^2 - 6x + 7$ を考える。

**(1)** 放物線 $y = f(x)$ の軸は $x = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，頂点は $\left(\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}, \boxed{オ}\right)$ である。

**(2)** 放物線 $y = f(x)$ を $x$ 軸方向に 1, $y$ 軸方向に $-8$ だけ平行移動して得られる曲線は

$$y = \boxed{カ}x^2 - \boxed{キク}x + \boxed{ケコ}$$

という式で表される。

**(3)** 2次方程式 $f(x) = 0$ は虚数解

$$\frac{\boxed{サ} \pm \sqrt{\boxed{シ}}\,i}{\boxed{ス}}$$

をもつ (ただし，$i$ は虚数単位を表す)。これらの虚数解を $\alpha, \beta$ $(\alpha \neq \beta)$ とおくとき，$\alpha + 2, \beta + 2$ を解にもつ2次方程式は

$$\boxed{セ}x^2 - \boxed{ソタ}x + \boxed{チツ} = 0$$

と書くことができる。

**右のページは白紙です。**

## 2 (16点)

座標平面上のベクトル $\vec{a}=(3,1)$, $\vec{b}=(1,5)$ を考える。

**(1)** $\vec{a}, \vec{b}$ の大きさはそれぞれ

$$|\vec{a}|=\sqrt{\boxed{\text{アイ}}},\quad |\vec{b}|=\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$$

であり, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta$ とおくと,

$$\cos\theta=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}$$

である。

**(2)** $\vec{c}$ は $\vec{c}=\vec{b}+k\vec{a}$ ( $k$ は実数) で表されるベクトルで, $\vec{a}$ に垂直であるものとする。このとき,

$$k=-\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

であり, $\vec{c}$ を成分表示すると

$$\vec{c}=\left(-\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}},\ \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\right)$$

となる。

**(3)** $\vec{c}$ を (2) で求めたベクトルとする。ベクトル $\vec{d}=(4,-\frac{1}{3})$ を $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{c}$ ( $m, n$ は実数) の形で表すと,

$$\vec{d}=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\vec{a}-\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}}\vec{c}$$

となる。

**右のページは白紙です。**

## 3 (17点)

$x$ を実数として

$$y = 3\sin 2x + 2\cos 2x$$

とおく。

**(1)** $x = \dfrac{\pi}{12}$ のとき, $y = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} + \sqrt{\boxed{ウ}}$,

$x = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき, $y = \boxed{エ} - \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\sqrt{\boxed{キ}}$

である。

**(2)** $x$ が $\tan x = \sqrt{6}$ を満たすとき,

$$\cos^2 x = \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$$

となるから,

$$y = \frac{\boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}} - \boxed{セソ}}{\boxed{タ}}$$

となる。

**(3)** $x$ が実数全体を動くとき, $y$ のとり得る値の範囲は

$$-\sqrt{\boxed{チツ}} \leqq y \leqq \sqrt{\boxed{テト}}$$

である。

**右のページは白紙です。**

問題 **4** および **5** の解答はそれぞれの**解答用紙**に記入しなさい。

## 4 (25 点)

関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = \frac{4}{x}, \quad g(x) = -\frac{1}{10}x^2 + x + \frac{2}{5}$$

と定め, 座標平面上の曲線 $C_1 : y = f(x)$, 曲線 $C_2 : y = g(x)$ を考える。

**(1)** 2つの曲線 $C_1$, $C_2$ は第1象限において, 2つの共有点をもつ。その1つは点 $(2, 2)$ である。もう1つの共有点の $x$ 座標を求めよ。

**(2)** 曲線 $C_1$ 上の点 $(2\sqrt{3}, f(2\sqrt{3}))$ における接線を $\ell$ とする。曲線 $C_2$ 上の点で, その点での接線が $\ell$ と平行となるものが1つある。その点をPとおく。点Pの $x$ 座標を求めよ。

ここで, 第1象限において2つの曲線 $C_1$, $C_2$ で囲まれた図形を $D$ とおく。ただし, $D$ は境界を含むものとする。また, 以下において, 対数は自然対数とする。

**(3)** 図形 $D$ の面積を求めよ。

**(4)** $n = 2, 4, 6, 8, 10$ として, 座標平面上に5つの点 $(n, \log n)$ を考える。この5つの点のうち図形 $D$ 内に含まれるものをすべて求めよ。これを解くにあたって, 以下の数値を用いよ。

$$\log 2 = 0.693, \quad \log 3 = 1.099, \quad \log 5 = 1.609$$

**右のページは白紙です。**

**5** (25 点)

下図で, 三角形 ABC は AB = AC である二等辺三角形である。辺 BC の長さを $\ell$ とおく。また, BC を底辺とするときの高さを $h$ とおく。辺 AB 上の点 $B_1$, AC 上の点 $C_1$, BC 上の点 $P_1$, $Q_1$ を四角形 $B_1P_1Q_1C_1$ が正方形となるようにとる。正方形 $B_1P_1Q_1C_1$ の 1 辺の長さを $a_1$ とする。

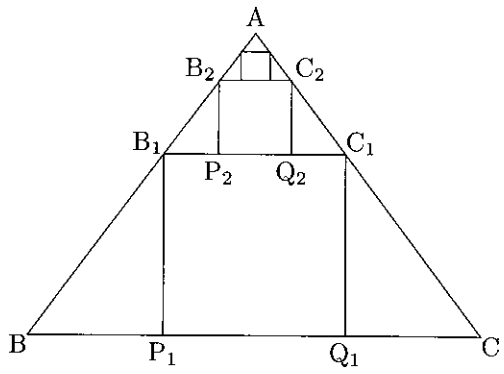
**(1)** $a_1$ を $\ell$, $h$ の式で書け。

次に, $AB_1$ 上の点 $B_2$, $AC_1$ 上の点 $C_2$, $B_1C_1$ 上の点 $P_2$, $Q_2$ を四角形 $B_2P_2Q_2C_2$ が正方形となるようにとり, 正方形 $B_2P_2Q_2C_2$ の 1 辺の長さを $a_2$ とする。

**(2)** $a_2$ を $\ell$, $h$ の式で書け。

続けて $a_1$, $a_2$ と同様にして, $n = 3, 4, \ldots$ に対して, $AB_{n-1}$ 上の点 $B_n$, $AC_{n-1}$ 上の点 $C_n$, $B_{n-1}C_{n-1}$ 上の点 $P_n$, $Q_n$ を四角形 $B_nP_nQ_nC_n$ が正方形となるようにとり, 正方形 $B_nP_nQ_nC_n$ の 1 辺の長さを $a_n$ とする。

**(3)** $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を $\ell$, $h$ の式で書け。

**(4)** $a_n$ を $\ell$, $h$, $n$ の式で書け。

**(5)** $\ell = 6$, $h = 4$ とする。正方形 $B_nP_nQ_nC_n$ の面積を $b_n$ とするとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ の値を求めよ。