

1

【解答】

- (1)
- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | 2 | イ | 5 | ウ | 8 | エ | 1 |
| オ | 2 | カ | 5 | キ | 8 | ク | 1 |
- (2)
- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ケ | 3 | | | | | | |
| コ | 7 | サ | 4 | シ | 1 | | |
| ス | 7 | セ | 3 | ソ | 1 | タ | 4 |
| チ | 4 | ツ | 7 | テ | 3 | ト | 3 |
| | | | | | | ナ | 4 |
- (3)
- | | | | |
|---|---|---|---|
| ニ | 5 | ヌ | 2 |
| ネ | 1 | ノ | 2 |
| ハ | 3 | ヒ | 2 |
| フ | 3 | ヘ | 2 |
- (4)
- | | | | |
|---|---|---|---|
| ホ | 5 | マ | 3 |
| ミ | 1 | ム | 3 |
| | | メ | 1 |
| | | モ | 2 |

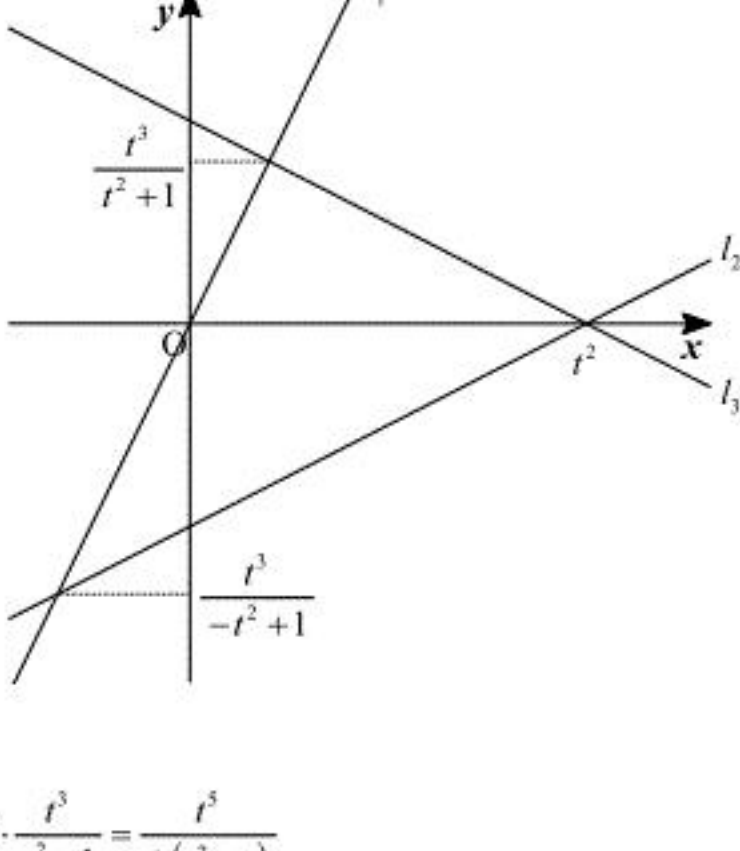
【解説】

- (1)(a)
- 3回の試行で同じ番号のボールを取り出さない確率は
- $$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{56}{81}$$
- であるから、同じ番号のボールを少なくとも2回取り出す確率は、余事象より
- $$1 - \frac{56}{81} = \frac{25}{81}$$
- である。
- (1)(b)
- 取り出したボールの番号の差が0となるときと1となるときに場合分けして考える。
- (i) ボールの番号の差が0となるとき
- 2回とも同じ番号のボールを取り出すので、その確率は
- $$\frac{9}{9 \cdot 9} = \frac{1}{9}$$
- である。
- (ii) ボールの番号の差が1となるとき
- 1回目に取り出すボールの番号が1または9となるときと2～8となるときに場合分けして考える。
- (ア) 1回目に取り出すボールの番号が1または9となるとき
- 2回目に取り出すボールの番号はそれぞれ1通りに決まるので、その確率の和は
- $$\frac{2}{9 \cdot 9} = \frac{2}{81}$$
- である。
- (イ) 1回目に取り出すボールの番号が2～8となるとき
- 2回目に取り出すボールの番号はそれぞれ2通りに決まるので、その確率の和は
- $$\frac{7 \cdot 2}{9 \cdot 9} = \frac{14}{81}$$
- である。
- 以上(ア)、(イ)より(ii) ボールの番号の差が1となるときの確率は
- $$\frac{2}{81} + \frac{14}{81} = \frac{16}{81}$$
- である。
- よって、以上(i)、(ii)より2回の試行で取り出したボールの番号の差が1以下となる確率は
- $$\frac{1}{9} + \frac{16}{81} = \frac{25}{81}$$
- である。

- (2)
- $t > 1$ であるから、それぞれの直線の式を変形して

$$\begin{aligned}l_1: y &= tx \\l_2: y &= \frac{1}{t}x - t \\l_3: y &= -\frac{1}{t}x + t\end{aligned}$$

となり、これらの直線を図示すると以下のようになる。



よって、

$$\begin{aligned}S_1(t) &= \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \frac{t^3}{t^2+1} = \frac{t^5}{2(t^2+1)} \\S_2(t) &= \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \left(-\frac{t^3}{-t^2+1} \right) = \frac{t^5}{2(t^2-1)}\end{aligned}$$

と表せる。

- (a)
- $S_2(t) = 2S_1(t)$ となるときは、 $t > 1$ に留意すると

$$\begin{aligned}\frac{t^5}{2(t^2-1)} &= 2 \cdot \frac{t^5}{2(t^2+1)} \\ \Leftrightarrow t^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow t &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

である。

- (b)
- 求めた $S_1(t)$, $S_2(t)$ より

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$$

$$= \frac{t^7}{t^4-1}$$

である。この $S(t)$ を微分して

$$\begin{aligned}S'(t) &= \left(\frac{t^7}{t^4-1} \right)' \\ &= \frac{7t^6(t^4-1) - t^7(4t^3)}{(t^4-1)^2} \\ &= \frac{t^6(3t^4-7)}{(t^4-1)^2}\end{aligned}$$

となる。よって、増減表を書くとな下のようになる。

t	1	...	$\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$	...
$S'(t)$		-	0	+
$S(t)$		↘		↗

増減表から、 $S(t)$ は $t = \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ で最小値

$$\begin{aligned}S\left(\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\right) &= \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4} \cdot 7}}{\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4} \cdot 4} - 1} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{7}{4}} \\ &= \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

をとる。

- (3)
- 解と係数の関係より

$$a+b+c=p \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$ab+bc+ca=-\frac{13}{4} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$abc=-\frac{15}{8} \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。 $b=0$ は明らかに方程式の解となり得ないので、②と③より

$$ab+bc+ca=b(a+c)+ca=2b^2-\frac{15}{8b}$$

$$\therefore 2b^2-\frac{15}{8b}=-\frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow 16b^3+26b-15=0$$

$$\Leftrightarrow (2b-1)(8b^2+4b+15)=0$$

が成り立つ。ここで、

$$8b^2+4b+15=8\left(b+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{29}{2}>0$$

であるから、 $b=\frac{1}{2}$ である。

よって、条件と①より

$$a+b+c=b+2b=3b=\frac{3}{2}$$

$$\therefore p=\frac{3}{2}$$

であり、これを3次方程式に代入して

$$x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{4}x+\frac{15}{8}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x-\frac{15}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2-4x-15)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x+3)(2x-5)=0$$

が得られる。よって、 $a > b > c$ より $a=\frac{5}{2}$, $c=-\frac{3}{2}$ である。

- (4)
- 条件より

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = |\overline{OA}| \cdot |\overline{OB}| \cos \frac{\pi}{3} = 1$$

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = |\overline{OB}| \cdot |\overline{OC}| \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$$

$$\overline{OC} \cdot \overline{OA} = |\overline{OC}| \cdot |\overline{OA}| \cos \frac{\pi}{3} = 3$$

$$\overline{OG} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC})$$

$$\overline{OL} = \frac{1}{2}(\overline{OM} + \overline{ON}) = \frac{1}{4}(\overline{OA} + 2\overline{OB} + \overline{OC})$$

$$\overline{GL} = \overline{OL} - \overline{OG} = -\frac{1}{12}(\overline{OA} - 2\overline{OB} + \overline{OC})$$

であるから、

$$\begin{aligned}|\overline{OG}| &= \sqrt{\left\{ \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) \right\}^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{|\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 + |\overline{OC}|^2 + 2(\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OC} \cdot \overline{OA})} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2 + 2\left(1 + \frac{3}{2} + 3\right)} \\ &= \frac{5}{3} \\ |\overline{GL}| &= \sqrt{\left\{ -\frac{1}{12}(\overline{OA} - 2\overline{OB} + \overline{OC}) \right\}^2} \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{|\overline{OA}|^2 + 4|\overline{OB}|^2 + |\overline{OC}|^2 + 2(-2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} - 2 \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OC} \cdot \overline{OA})} \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{2^2 + 4 \cdot 1^2 + 3^2 + 2\left(-2 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 3\right)} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{12}\end{aligned}$$

と求まる。

(1)

C_n を表す関数 $y = x^3 - (2n+1)x^2 + n(n+1)x$ の導関数は

$$y' = 3x^2 - (4n+2)x + n(n+1)$$

であるから、 C_n の $x=t$ における接線は

$$\begin{aligned} y &= \{3t^2 - (4n+2)t + n(n+1)\}(x-t) + t^3 - (2n+1)t^2 + n(n+1)t \\ &= \{3t^2 - (4n+2)t + n(n+1)\}x - 2t^3 + (2n+1)t^2 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。

これが原点を通るので、 $(x, y) = (0, 0)$ を代入すると、

$$-2t^3 + (2n+1)t^2 = 0$$

を得る。

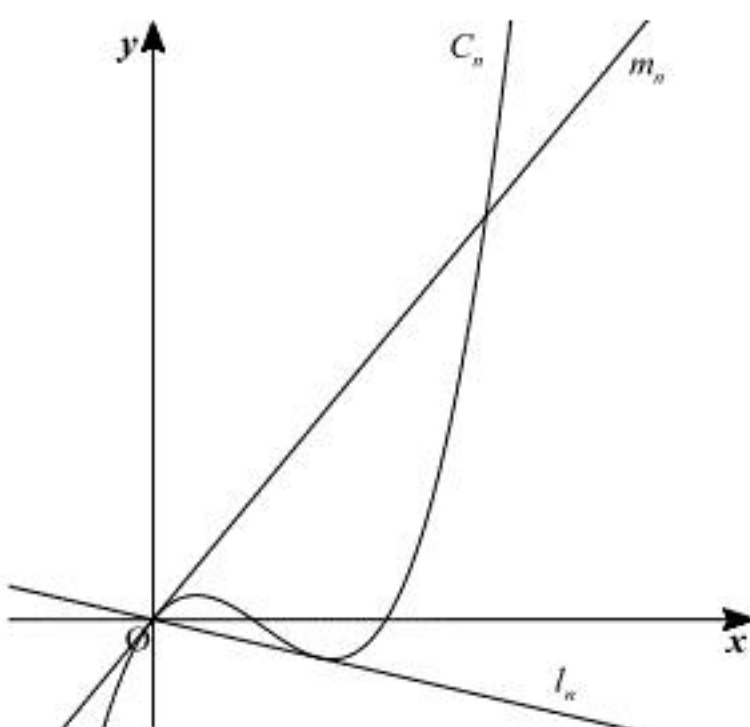
よって l_n は $x = \frac{2n+1}{2}$ における接線であり、その式は①に $t = \frac{2n+1}{2}$ を代入して

$$\begin{aligned} y &= \left\{3\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 - (4n+2)\left(\frac{2n+1}{2}\right) + n(n+1)\right\}x \\ &= -\frac{1}{4}x \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{1}{4}x$$

(2)



C_n と l_n の交点は、 $x=0, \frac{2n+1}{2}$ であり、 $x = \frac{2n+1}{2}$ は重解である。

よって T_n は

$$\begin{aligned} T_n &= \int_0^{\frac{2n+1}{2}} \left\{ x(x-n)(x-n-1) - \left(-\frac{1}{4}x\right) \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{2n+1}{2}} x \left(x - \frac{2n+1}{2} \right)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{2n+1}{2}} \left(x - \frac{2n+1}{2} \right)^3 dx + \frac{2n+1}{2} \int_0^{\frac{2n+1}{2}} \left(x - \frac{2n+1}{2} \right)^2 dx \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{2n+1}{2} \right)^4 + \frac{1}{3} \left(\frac{2n+1}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{192} (2n+1)^4 \end{aligned}$$

となる。

また C_n の原点における接線を m_n とすると、その式は①に $t=0$ を代入して

$$y = n(n+1)x$$

となる。

C_n と m_n の交点を求めると

$$\begin{aligned} x(x-n)(x-n-1) &= n(n+1)x \\ \Leftrightarrow x^3 - (2n+1)x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 2n+1 \end{aligned}$$

となる。

よって S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{2n+1} \{ n(n+1)x - x(x-n)(x-n-1) \} dx \\ &= \int_0^{2n+1} -x^2(x-2n-1) dx \\ &= -\int_0^{2n+1} x^3 dx + (2n+1) \int_0^{2n+1} x^2 dx \\ &= -\frac{1}{4} (2n+1)^4 + \frac{1}{3} (2n+1)^4 \\ &= \frac{1}{12} (2n+1)^4 \end{aligned}$$

となる。

以上より

$$\frac{T_n}{S_n} = \frac{1}{16}$$

である。

$$(\text{答}) \quad T_n = \frac{1}{192} (2n+1)^4, S_n = \frac{1}{12} (2n+1)^4, \frac{T_n}{S_n} = \frac{1}{16}$$

(3)

①より、 C_1 の $x=t$ における接線の傾きは $3t^2 - 6t + 2$ である。

よってこれが l_1 の傾き $-\frac{1}{4}$ と一致するような t を求める。

$$\begin{aligned} 3t^2 - 6t + 2 &= -\frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow 3(2t-3)(2t-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので、 l' は C_1 の $x = \frac{1}{2}$ における接線だとわかる。

よってその式は①に $t = \frac{1}{2}, n=1$ を代入して

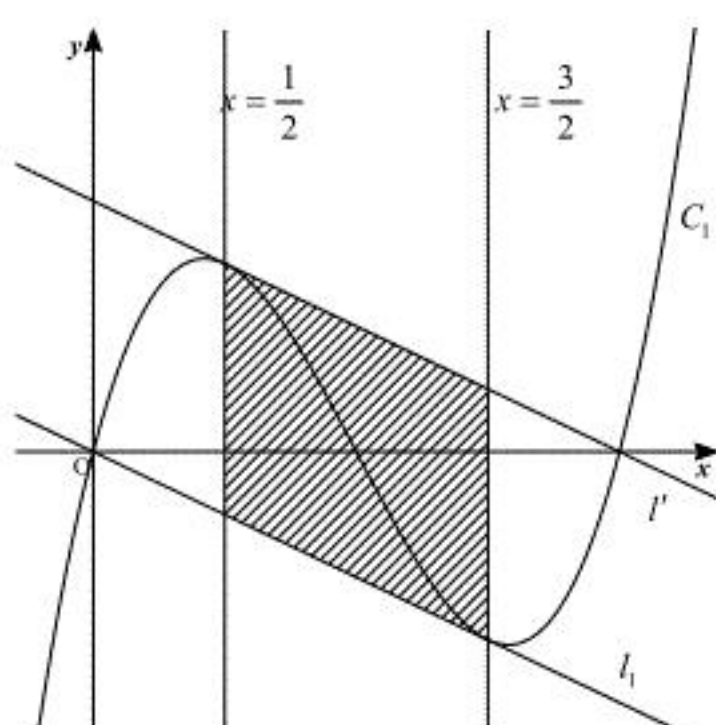
$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{4}x - 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

(4)

以下の図における斜線部の図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求める。



ここで $x=t$ ($\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$) と l, l' との交点を A_1, A_2 とし、 $(t, 0)$ を A_0 とすると

$$A_1\left(t, -\frac{t}{4}\right), A_2\left(t, -\frac{t}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

であるので

$$\left| \overline{A_0 A_1} \right| = \frac{t}{4}, \left| \overline{A_0 A_2} \right| = -\frac{t}{4} + \frac{1}{2}$$

となる。

よって

$$\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \text{ のとき } \left| \overline{A_0 A_1} \right| \leq \left| \overline{A_0 A_2} \right|$$

$$1 < t \leq \frac{3}{2} \text{ のとき } \left| \overline{A_0 A_1} \right| > \left| \overline{A_0 A_2} \right|$$

となる。

以上より求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \pi \left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right)^2 dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \pi \left(-\frac{x}{4} \right)^2 dx \\ &= \pi \left[-\frac{4}{3} \left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \pi \left[-\frac{4}{3} \left(-\frac{x}{4} \right)^3 \right]_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{19}{192} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{19}{192} \pi$$

(3)

(1)

まず,

$$\theta_k = \frac{k-1}{4}\pi$$
$$r_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

である。よって,

$$A_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \begin{pmatrix} \cos \frac{k-1}{4}\pi & \sin \frac{k-1}{4}\pi \\ \sin \frac{k-1}{4}\pi & -\cos \frac{k-1}{4}\pi \end{pmatrix}$$
$$A_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} \cos \frac{k}{4}\pi & \sin \frac{k}{4}\pi \\ \sin \frac{k}{4}\pi & -\cos \frac{k}{4}\pi \end{pmatrix}$$

であるから,

$$C_k = A_k A_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \begin{pmatrix} \cos \frac{k-1}{4}\pi & \sin \frac{k-1}{4}\pi \\ \sin \frac{k-1}{4}\pi & -\cos \frac{k-1}{4}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{k}{4}\pi & \sin \frac{k}{4}\pi \\ \sin \frac{k}{4}\pi & -\cos \frac{k}{4}\pi \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \begin{pmatrix} \cos \frac{k}{4}\pi \cos \frac{k-1}{4}\pi + \sin \frac{k}{4}\pi \sin \frac{k-1}{4}\pi & \sin \frac{k}{4}\pi \cos \frac{k-1}{4}\pi - \cos \frac{k}{4}\pi \sin \frac{k-1}{4}\pi \\ \cos \frac{k}{4}\pi \sin \frac{k-1}{4}\pi - \sin \frac{k}{4}\pi \cos \frac{k-1}{4}\pi & \sin \frac{k}{4}\pi \sin \frac{k-1}{4}\pi + \cos \frac{k}{4}\pi \cos \frac{k-1}{4}\pi \end{pmatrix}$$

加法定理を用いて展開し計算すると,

$$C_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad C_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(2)

(1)と同様に計算すると,

$$D_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad D_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(3)

まず,

$$\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

である。これは $-\frac{\pi}{4}$ の回転行列なので, $T_k = \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^2$ とおくと,

$$T_k = \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} \\ -\sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

である。ゆえに,

$$\left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^2 + \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^4 + \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^6 + \cdots + \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^{2m}$$
$$= \sum_{j=1}^m T_k^j$$

ここで,

$$T_k + T_k^2 + T_k^3 + T_k^4$$
$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} \\ -\sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \pi & \sin \pi \\ -\sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \frac{3}{2}\pi & \sin \frac{3}{2}\pi \\ -\sin \frac{3}{2}\pi & \cos \frac{3}{2}\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2\pi & \sin 2\pi \\ -\sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix}$$
$$= O$$

である。また, 回転行列の性質から,

$$T_k^{l+4} = \begin{pmatrix} \cos \frac{l+4}{2}\pi & \sin \frac{l+4}{2}\pi \\ -\sin \frac{l+4}{2}\pi & \cos \frac{l+4}{2}\pi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{l}{2}\pi & \sin \frac{l}{2}\pi \\ -\sin \frac{l}{2}\pi & \cos \frac{l}{2}\pi \end{pmatrix}$$
$$= T_k^l$$

が成り立つ。ゆえに,

$$T_k^n + T_k^{n+1} + T_k^{n+2} + T_k^{n+3} = O$$

が任意の自然数 n について成り立つ。したがって,

$$\sum_{j=1}^m T_k^j = \begin{cases} T_k & (m=4p-3) \\ T_k + T_k^2 & (m=4p-2) \\ T_k + T_k^2 + T_k^3 & (m=4p-1) \\ O & (m=4p) \end{cases}$$

である。ただし, p は自然数である。また,

$$T_k = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} \\ -\sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_k + T_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \pi & \sin \pi \\ -\sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T_k + T_k^2 + T_k^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \frac{3}{2}\pi & \sin \frac{3}{2}\pi \\ -\sin \frac{3}{2}\pi & \cos \frac{3}{2}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。以上から,

$$\sum_{j=1}^m T_k^j = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & (m=4p-3) \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & (m=4p-2) \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & (m=4p-1) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (m=4p) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & (m=4p-3) \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & (m=4p-2) \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & (m=4p-1) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (m=4p) \end{cases} \quad (p \text{ は自然数})$$

(4)

$$C_k^2 D_k^2 = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}^2 \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}^2$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{8k-4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{8k-4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5)

(4)の結果から,

$$y_n = z_n = 0$$
$$x_n = w_n = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{8k-4}$$

である。 x_n について考えると, いま,

$$x_n = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{8k-4} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \cdots + n \left(\frac{1}{2}\right)^{8n-4}$$

$$\frac{1}{256} x_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} + \cdots + n \left(\frac{1}{2}\right)^{8n+4}$$

となる。よって,

$$x_n - \frac{1}{256} x_n = \frac{1}{16} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{256}\right) + \left(\frac{1}{256}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{256}\right)^{n-1} \right\} - \frac{n}{16} \left(\frac{1}{256}\right)^n$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{256}\right)^n}{1 - \frac{1}{256}} - \frac{n}{16} \left(\frac{1}{256}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{256}{255} \left\{ \frac{1}{16} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{256}\right)^n}{1 - \frac{1}{256}} - \frac{n}{16} \left(\frac{1}{256}\right)^n \right\}$$

である。以上から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{256}{255} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\frac{255}{256}} = \frac{4096}{65025}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{4096}{65025}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$