

(1)

$$f'(x) = 4x^3 - 2ax + b$$

であるから、 $x = s, t$ における接線の傾きはそれぞれ

$$4s^3 - 2as + b, 4t^3 - 2at + b$$

である。よって、これらが等しいとき

$$\begin{aligned} 4s^3 - 2as + b &= 4t^3 - 2at + b \\ \Leftrightarrow 2a(s - t) &= 4(s^3 - t^3) \\ \Leftrightarrow a &= 2(s^2 + st + t^2) \quad (\because s \neq t) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = 2(s^2 + st + t^2)$$

(2)

(a)

共通の接線 l の式は、

$$\begin{aligned} y &= (4s^3 - 2as + b)(x - s) + s^4 - as^2 + bs \\ \Leftrightarrow y &= (4s^3 - 2as + b)x - 3s^4 + as^2 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表される。よって、もう一つの接点の x 座標を t ($\neq s$) とおくと、

$$\begin{aligned} t^4 - at^2 + bt &= (4s^3 - 2as + b)t - 3s^4 + as^2 \\ \Leftrightarrow t^4 - 4s^3t + 3s^4 - a(s - t)^2 &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。また、 $x = s, t$ における接線の傾きは互いに等しいので、(1)より

$$a = 2(s^2 + st + t^2) \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。③を②に代入して計算すると、

$$\begin{aligned} s^4 - t^4 - 2s^3t + 2st^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (s^2 - t^2)(s - t)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (s + t)(s - t)^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow t = -s \quad (\because s \neq t) \end{aligned}$$

を得る。これを③に代入すると、

$$a = 2s^2$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a = 2s^2$$

(b)

$a = 2s^2$ を①に代入すると、

$$\begin{aligned} y &= bx - s^4 \\ \Leftrightarrow y &= bx - \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad y = bx - \frac{a^2}{4}$$

(3)

x の値を増加させたときに、 $f'(x)$ の符号が $+$ から $-$ に転ずるような x が存在する条件を求めればよい。

$$g(x) = f'(x) = 4x^3 - 2ax + b$$

とおくと、

$$g'(x) = 2(6x^2 - a)$$

である。

[1] $a \leq 0$ のとき

$$g'(x) = 2(6x^2 - a) \geq 0$$

であるから、 $g(x)$ は単調増加する。

よって、 $g(x)$ の符号が $+$ から $-$ に転ずるような x は存在しない。

[2] $a > 0$ のとき

$g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\dots$	$-\sqrt{\frac{a}{6}}$	$\dots$	$\sqrt{\frac{a}{6}}$	$\dots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、求める条件は、 $g(x)$ の極大値と極小値の積が負になることである、と言い換えることができる。

$$\begin{aligned} g\left(-\sqrt{\frac{a}{6}}\right)g\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right) &< 0 \\ \Leftrightarrow \left(b + \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{a}{6}}\right)\left(b - \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{a}{6}}\right) &< 0 \\ \Leftrightarrow b^2 &< \frac{8}{27}a^3 \end{aligned}$$

以上[1], [2]より、求める条件は

$$\begin{aligned} a > 0 \quad \text{かつ} \quad b^2 &< \frac{8}{27}a^3 \\ \Leftrightarrow b^2 &< \frac{8}{27}a^3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b^2 < \frac{8}{27}a^3$$

2

(1)

P, Q, R 3 点の z 座標がすべて等しいので、

$$\text{平面 } z = (2-s) + s \sin t$$

は、3 点をすべて含む平面である。

これ以外に 3 点を含む平面がないことを示す。任意の $0 < s < 1$, t に対して、P, Q, R のどの 2 点も一致しないことがわかるから、P, Q, R の 3 点が同一直線上にないことを示せばよい。もし同一直線上にあるとすれば、ある実数 $k \neq 0$ が存在して、 $\overline{PQ} = k \overline{PR}$ となるが、

$$\overline{PQ} \text{ の } y \text{ 成分} = \frac{2-s}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{2}} \cos t \neq 0$$

$$\overline{PR} \text{ の } y \text{ 成分} = 0$$

より、このような k は存在しえず、矛盾である。したがって、3 点 P, Q, R は同一直線上になく、3 点を含む平面はただひとつ、

$$z = (2-s) + s \sin t$$

のみである。

$$(\text{答}) \quad z = (2-s) + s \sin t$$

(2)

$$\overline{RP} = ((2-s) + s \cos t, 0, 0)$$

$$= \{(2-s) + s \cos t\} (1, 0, 0),$$

$$\overline{RQ} = \left(\frac{2-s}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{2-s}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{2}} \cos t, 0 \right)$$

$$= \{(2-s) + s \cos t\} \left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}, 0 \right)$$

であるから、それぞれの長さを計算すると、

$$RP = (2-s) + s \cos t,$$

$$RQ = \{(2-s) + s \cos t\} \left(\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + 0^2 \right)$$

$$= (2-s) + s \cos t$$

となり、 $RP = RQ$ となることが示せた。

(証明終)

(3)

(2) の表示から、扇形 C の中心角 $\angle PRQ$ は $\frac{\pi}{4}$ であることがわかる。よって、 C の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \{(2-s) + s \cos t\}^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} \{(2-s) + s \cos t\}^2$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{8} \{(2-s) + s \cos t\}^2$$

(4)

t が $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ を動くとき、 $-1 \leq \sin t \leq 1$ であるから、R の z 座標の動く範囲は

$$(2-s) + s \cdot (-1) \leq z \leq (2-s) + s \cdot 1$$

$$\therefore 2-2s \leq z \leq 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2-2s \leq z \leq 2$$

(5)

C が z 軸と垂直な平面に存在していることを考えると、通過部分の体積 V_1 は扇形 C の面積を (4) で求めた区間 $2-2s \leq z \leq 2$ で積分することにより求まるから、

$$V_1 = \int_{2-2s}^2 \frac{\pi}{8} \{(2-s) + s \cos t\}^2 dz$$

となる。ここで、変数変換

$$z = (2-s) + s \sin t, \quad dz = s \cos t dt \quad \begin{array}{c|c|c|c} z & 2-2s & \rightarrow & 2 \\ t & -\frac{\pi}{2} & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

を考えて、 $\cos t$ が偶関数であることに注意すると、

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{8} \{(2-s) + s \cos t\}^2 \cdot s \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{8} \left\{ (2-s)^2 s \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + 2(2-s)s^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt + s^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} \left\{ (2-s)^2 s [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2(2-s)s^2 \left[\frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{2} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + s^3 \left[\frac{1}{12} \sin 3t + \frac{3}{4} \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} \left\{ (2-s)^2 s + \frac{\pi}{2} (2-s)s^2 + \frac{2}{3} s^3 \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} s \left\{ \frac{10-3\pi}{6} s^2 + (\pi-4)s + 4 \right\} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad V_1 = \frac{\pi}{4} s \left\{ \frac{10-3\pi}{6} s^2 + (\pi-4)s + 4 \right\}$$

(6)

t が $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ を動くときも、 $-1 \leq \sin t \leq 1$ であるから、R の z 座標の動く範囲は (4) と同じく、 $2-2s \leq z \leq 2$ となる。したがって、(5) と同様に考えて、

$$V_2 = \int_{2-2s}^2 \frac{\pi}{8} \{(2-s) + s \cos t\}^2 dz$$

となる。ここで、変数変換

$$z = (2-s) + s \sin t, \quad dz = s \cos t dt \quad \begin{array}{c|c|c|c} z & 2-2s & \rightarrow & 2 \\ t & \frac{3\pi}{2} & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

を考えて、

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{8} \{(2-s) + s \cos t\}^2 \cdot s \cos t dt \\ &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\pi}{8} \{(2-s) + s \cos t\}^2 \cdot s \cos t dt \end{aligned}$$

となり、さらに変数変換

$$t = u + \pi, \quad dt = du \quad \begin{array}{c|c|c|c} t & \frac{\pi}{2} & \rightarrow & \frac{3\pi}{2} \\ u & -\frac{\pi}{2} & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

を施し、 $\cos u$ が偶関数であることに注意すると、

$$\begin{aligned} V_2 &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{8} \{(2-s) + s \cos(u+\pi)\}^2 \cdot s \cos(u+\pi) du \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{8} \{(2-s) - s \cos u\}^2 \cdot s \cos u du \\ &= \frac{\pi}{8} \left\{ (2-s)^2 s \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du - 2(2-s)s^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du + s^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 u du \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} \left\{ (2-s)^2 s [\sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2(2-s)s^2 \left[\frac{1}{4} \sin 2u + \frac{1}{2} u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + s^3 \left[\frac{1}{12} \sin 3u + \frac{3}{4} \sin u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} \left\{ (2-s)^2 s - \frac{\pi}{2} (2-s)s^2 + \frac{2}{3} s^3 \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} s \left\{ \frac{10+3\pi}{6} s^2 - (\pi+4)s + 4 \right\} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad V_2 = \frac{\pi}{4} s \left\{ \frac{10+3\pi}{6} s^2 - (\pi+4)s + 4 \right\}$$

(7)

(5) および (6) の計算より、

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \frac{\pi}{4} \left\{ (2-s)^2 s + \frac{\pi}{2} (2-s)s^2 + \frac{2}{3} s^3 \right\} - \frac{\pi}{4} \left\{ (2-s)^2 s - \frac{\pi}{2} (2-s)s^2 + \frac{2}{3} s^3 \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} (2-s)s^2 \\ &= \frac{\pi^2}{4} (2-s)s^2 \end{aligned}$$

である。よって、

$$f(s) = (2-s)s^2$$

とおき、 f の $\frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}$ における最大値を考えればよい。

$$f'(s) = 4s - 3s^2 = -3s \left(s - \frac{4}{3} \right)$$

であるから、次のような増減表がかかる。

s	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(s)$		+	
$f(s)$		$\nearrow$	

したがって、この区間で $f(s)$ は単調増加であり、 $s = \frac{1}{2}$ のとき最大となる。ゆえに、 $s = \frac{1}{2}$ の

とき、 $V_1 - V_2$ は最大値

$$\frac{\pi^2}{4} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32} \pi^2$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } \frac{3}{32} \pi^2, \text{ そのときの } s \text{ の値: } \frac{1}{2}$$