

- (1)
- (a) ア 3 イ 1 ウ 4 エ 3 オ 4
 (b) カ 1 キ 4 ク 1 ケ 6 コ 6 サ 9 シ 1 ス 1 セ 2
- (2)
- (a) ソ 4 タ 8 チ 4 ツ 0 テ 4 ト 1 ナ 4 ニ 1 ヌ 4
 ネ 1
 (b) ノ 7 ハ 3 ヒ 1 フ 4 ヘ 7 ホ 3 マ 3

【解説】

(1)

(a)

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \cos^2 \theta + (\sin \theta - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \\ &= 2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 2\sin \theta \cos \theta \\ &= 2 - \sin 2\theta \end{aligned}$$

となる。 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ より、 $-2\pi \leq 2\theta \leq 2\pi$ である。したがって

$$-1 \leq \sin 2\theta \leq 1$$

であるので PQ^2 の最大値は 3 である。また最大値を与える θ は

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= -1 \\ \Leftrightarrow 2\theta &= -\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \\ \therefore \theta &= -\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

である。

(b)

$|\overline{OP}| = |\overline{OR}| = 1$ である。したがって

$$\overline{OP} \cdot \overline{OR} = \cos \alpha$$

である。一方点 P, R の座標より

$$\begin{aligned} \overline{OP} \cdot \overline{OR} &= \sin \theta \cos 2\theta \\ &= -2\sin^3 \theta + \sin \theta \end{aligned}$$

である。よって $t = \sin \theta$ とおくと

$$\cos \alpha = -2t^3 + t$$

である。これを $f(t)$ とおく。 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $-1 \leq t \leq 1$ である。 $f(t)$ を微分する

と

$$\begin{aligned} f'(t) &= -6t^2 + 1 \\ &= -6\left(t + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{aligned}$$

となる。よって $f(t)$ の増減表は下のようになる。

t	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	...	1
$f'(t)$		-	0	+	0	-	
$f(t)$	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{6}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	$\searrow$	-1

したがって $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、すなわち $-1 \leq t \leq 1$ のとき $f(t) = \cos \alpha$ の最大値は

$f(-1) = 1$ であり、最大値を与える θ は

$$\begin{aligned} \sin \theta &= -1 \\ \therefore \theta &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

である。また $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、すなわち $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ のときを考える。この範囲で $f(t)$

は単調減少するので $f(t) = \cos \alpha$ の最大値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ であり、最大値を与える θ は

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

である。

$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、すなわち $-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ のときを考える。

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9} > -\frac{1}{4} = f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

であるのでこの範囲における $f(t) = \cos \alpha$ の最大値は $f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9}$ である。

(2)

(a)

$A^2 = 4A$ より

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}$$

となる。各成分を比較すると

$$a^2 + bc = 4a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(a+d)b = 4b \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(a+d)c = 4c \quad \dots \textcircled{3}$$

$$d^2 + bc = 4d \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。 $bc = 0$ のとき①より

$$a^2 = 4a$$

$$\therefore a = 0, 4$$

となる。同様に④より

$$d = 0, 4$$

である。 $a = d = 0$ のとき②、③より $b = c = 0$ となり A が零行列となり条件に反する。したがって a, d のうち少なくとも1つは0でない。したがって

$$a + d = 4, 8$$

である。 $bc \neq 0$ のとき②より

$$a + d = 4$$

である。一方①より

$$bc = 4a - a^2$$

である。したがって以上より

$$\begin{aligned} ad - bc &= a(4 - a) - (4a - a^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $b = c > 0$ のとき

$$b^2 = 4a - a^2$$

$$a + d = 4$$

$$d^2 + b^2 = 4d$$

となる。したがって

$$d = 4 - a$$

$$b = c = \sqrt{(4 - a)a}$$

となる。ゆえに行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{(4 - a)a} \\ \sqrt{(4 - a)a} & 4 - a \end{pmatrix}$$

となる。

(b)

2 項定理より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n {}_nC_k 4^k 3^{n-k} &= \sum_{k=0}^n ({}_nC_k 4^k 3^{n-k}) - 3^n \\ &= (4 + 3)^n - 3^n \\ &= 7^n - 3^n \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} (A + 3E)^n &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k 3^{n-k} A^k \\ &= \sum_{k=1}^n ({}_nC_k 4^{k-1} 3^{n-k} A) + 3^n E \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n {}_nC_k 4^k 3^{n-k} \right) A + 3^n E \\ &= \frac{1}{4} (7^n - 3^n) A + 3^n E \end{aligned}$$

となる。

(1)

(a)

与えられた定積分を計算すると

$$\begin{aligned}\int_1^{r^2} \left(x^3 + \frac{r^6}{x^3} \right) \frac{1}{x} dx &= \int_1^{r^2} \left(x^2 + \frac{r^6}{x^4} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{r^6}{3x^3} \right]_1^{r^2} \\ &= \frac{2r^6}{3} - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^{r^2} \left(x + \frac{r^6}{x} \right) \frac{1}{x} dx &= \int_1^{r^2} \left(1 + \frac{r^6}{x^2} \right) dx \\ &= \left[x - \frac{r^6}{x} \right]_1^{r^2} \\ &= r^6 - 1\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \int_1^{r^2} \left(x^3 + \frac{r^6}{x^3} \right) \frac{1}{x} dx = \frac{2r^6}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\int_1^{r^2} \left(x + \frac{r^6}{x} \right) \frac{1}{x} dx = r^6 - 1$$

(b)

与えられた定積分を計算すると

$$\begin{aligned}\int_1^{r^2} \left(x^3 + \frac{r^6}{x^3} \right)^2 \frac{1}{x} dx &= \int_1^{r^2} \left(x^5 + \frac{2r^6}{x} + \frac{r^{12}}{x^7} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^6}{6} + 2r^6 \log x - \frac{r^{12}}{6x^6} \right]_1^{r^2} \\ &= \frac{r^{12}}{3} + 4r^6 \log r - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^{r^2} \left(x + \frac{r^6}{x} \right)^2 \frac{1}{x} dx &= \int_1^{r^2} \left(x + \frac{2r^6}{x} + \frac{r^{12}}{x^3} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 2r^6 \log x - \frac{r^{12}}{2x^2} \right]_1^{r^2} \\ &= \frac{1}{2} (r^{12} + 12r^6 \log r - 1)\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \int_1^{r^2} \left(x^3 + \frac{r^6}{x^3} \right)^2 \frac{1}{x} dx = \frac{r^{12}}{3} + 4r^6 \log r - \frac{1}{3}$$

$$\int_1^{r^2} \left(x + \frac{r^6}{x} \right)^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} (r^{12} + 12r^6 \log r - 1)$$

(2)

(a)

 $t = x^3$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2$$

x	1	$\rightarrow$	r^2
t	1	$\rightarrow$	r^6

であるから

$$\begin{aligned}\int_1^{r^2} f \left(x^3 + \frac{r^6}{x^3} \right) \frac{1}{x} dx &= \int_1^{r^6} f \left(t + \frac{r^6}{t} \right) \frac{1}{3t} dt \\ &= \frac{1}{3} \int_1^{r^6} f \left(t + \frac{r^6}{t} \right) \frac{1}{t} dt\end{aligned}$$

となる。したがって

$$a = \frac{1}{3}$$

である。

$$\text{(答)} \quad a = \frac{1}{3}$$

(b)

 $t = \frac{r^6}{x}$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{r^6}{x^2}$$

x	1	$\rightarrow$	r^3
t	r^6	$\rightarrow$	r^3

であるから

$$\begin{aligned}\int_1^{r^2} f \left(x + \frac{r^6}{x} \right) \frac{1}{x} dx &= \int_{r^6}^{r^3} f \left(t + \frac{r^6}{t} \right) \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{x^2}{r^6} \right) dt \\ &= \int_{r^6}^{r^3} f \left(t + \frac{r^6}{t} \right) \frac{1}{t} dt\end{aligned}$$

となる。よって

$$b = 1$$

である。

$$\text{(答)} \quad b = 1$$

(c)

(a)(b)の結果より

$$\begin{aligned}\int_1^{r^2} f \left(x^3 + \frac{r^6}{x^3} \right) \frac{1}{x} dx &= \frac{1}{3} \int_1^{r^6} f \left(t + \frac{r^6}{t} \right) \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_1^{r^2} f \left(t + \frac{r^6}{t} \right) \frac{1}{t} dt + \int_{r^2}^{r^6} f \left(t + \frac{r^6}{t} \right) \frac{1}{t} dt \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_1^{r^2} f \left(t + \frac{r^6}{t} \right) \frac{1}{t} dt + \int_1^{r^2} f \left(t + \frac{r^6}{t} \right) \frac{1}{t} dt \right) \\ &= \frac{2}{3} \int_1^{r^2} f \left(t + \frac{r^6}{t} \right) \frac{1}{t} dt\end{aligned}$$

となる。したがって

$$c = \frac{2}{3}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad c = \frac{2}{3}$$

(1)

円 C_2 の半径は

$$\sqrt{(a-1)^2 + (a-1)^2} = \sqrt{2}(a-1)$$

となる。したがって円 C_2 の中心が (a, a) であることより、円 C_2 の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = 2(a-1)^2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (x-a)^2 + (y-a)^2 = 2(a-1)^2$$

(2)

 $B\left(b, \frac{1}{b}\right) (b < 1)$ とおく。点 B は円 C_2 上の点であることより

$$\begin{aligned} (b-a)^2 + \left(\frac{1}{b}-a\right)^2 &= 2(a-1)^2 \\ \Leftrightarrow \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 - 2a\left(b+\frac{1}{b}\right) + 2a^2 - 2 &= 2(a-1)^2 \\ \Leftrightarrow \left\{\left(b+\frac{1}{b}\right) - 2\right\} \left\{\left(b+\frac{1}{b}\right) - 2(a-1)\right\} &= 0 \\ \therefore b + \frac{1}{b} = 2, 2(a-1) \end{aligned}$$

となる。ここで $b + \frac{1}{b} = 2$ のとき

$$\begin{aligned} b + \frac{1}{b} &= 2 \\ \Leftrightarrow b^2 - 2b + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= 1 \end{aligned}$$

となるがこれは $b < 1$ に反する。したがって

$$b + \frac{1}{b} = 2(a-1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。一方 $H(h, h)$ とおくと、線分 $BH \perp$ 直線 $y = x$ より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h-b \\ h-\frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ h-b + h-\frac{1}{b} &= 0 \\ \therefore h &= \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

となる。よって①より

$$h = a-1$$

となる。したがって

$$H(a-1, a-1)$$

である。また点 H と点 $(1, 1)$ の距離は

$$\sqrt{(a-2)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{2}(a-2)$$

である。

$$(\text{答}) \quad H(a-1, a-1), \sqrt{2}(a-2)$$

(3)

 $P(p, p), Q\left(q, \frac{1}{q}\right)$ とおく。このとき 2 点 $P, (1, 1)$ の距離が t であり、 $p > 1$ であることより

$$p = 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}$$

である。一方、直線 $y = x$ と PQ が直交することより

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q-p \\ \frac{1}{q}-p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \therefore q + \frac{1}{q} &= 2p \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (p-q)^2 + \left(p - \frac{1}{q}\right)^2 \\ &= 2p^2 - 2p\left(q + \frac{1}{q}\right) + \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 - 2 \\ &= 2p^2 - 4p^2 + 4p^2 - 2 \\ &= 2p^2 - 2 \\ &= t^2 + 2\sqrt{2}t \end{aligned}$$

となる。よって

$$PQ = \sqrt{t^2 + 2\sqrt{2}t}$$

$$(\text{答}) \quad \sqrt{t^2 + 2\sqrt{2}t}$$

(4)

 $d = \sqrt{2}(a-2), f(t) = \sqrt{t^2 + 2\sqrt{2}t}$ とおくとき求める体積は

$$\begin{aligned} \int_0^d \pi \{f(t)\}^2 dt &= \pi \int_0^d (t^2 + 2\sqrt{2}t) dt \\ &= \pi \left[\frac{t^3}{3} + \sqrt{2}t^2 \right]_0^d \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi (a-2)^2 (a+1) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi (a-2)^2 (a+1)$$