

1

(1)

【解答】

ア 2 イ 1 ウ 0

【解説】

$\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}{2}$ の逆数は

$$\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

であるから

$$\frac{1}{k}<2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

である。よって

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}&<\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{2}{n}\left\{\left(1-\sqrt{0}\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)+\cdots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\right\}\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{2}{n}\cdot\sqrt{n}\\&=0\end{aligned}$$

また $\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}>0$ より

$$\lim_{n\rightarrow\infty}0<\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$$

である。よって、はさみうちの定理から

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=0$$

である。

(2)

(a)

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^l\frac{1}{n(n+1)}&=\sum_{n=2}^l\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+1}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{l+1}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}&=\lim_{l\rightarrow\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{l+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(b)

$$S_l=\sum_{n=1}^l\frac{1}{n}s_{n+1}-\sum_{n=1}^{l-1}\frac{1}{n+1}s_{n+1} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}\lim_{l\rightarrow\infty}S_l&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}s_{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}s_{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)s_{n+1}\end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned}S_l&=\sum_{n=1}^l\frac{1}{n}s_{n+1}-\sum_{n=1}^{l-1}\frac{1}{n+1}s_{n+1}\\&=\sum_{n=1}^l\frac{1}{n}s_{n+1}-\left(\sum_{n=1}^l\frac{1}{n}s_n-s_1\right)\\&=1+\sum_{n=1}^l\frac{1}{n}(s_{n+1}-s_n)\end{aligned}$$

ここで $s_{n+1}-s_n=\frac{1}{n+1}$ であるから

$$\begin{aligned}S_l&=1+\sum_{n=1}^l\frac{1}{n+1}\\&=1+\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^l\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

である。(a)より

$$\begin{aligned}\lim_{l\rightarrow\infty}S_l&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\&=2\end{aligned}$$

である。

(答) 2

(c)

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^l\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+1}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{l}\right)-\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{l}+\cdots+\frac{1}{l+n+1}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{l+1}+\cdots+\frac{1}{l+n+1}\right)\end{aligned}$$

である。ここで $\lim_{l\rightarrow\infty}\frac{1}{l+1}+\cdots+\frac{1}{l+n+1}=0$ と収束するから

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+1}\right)&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k+1}\\&=s_{n+1}\end{aligned}$$

である。よって $p=n+1$ である。

(答) $p=n+1$

(d)

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+n+1)}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m+n+1)-m}{m(m+n+1)}\cdot\frac{1}{n+1}\\&=\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+1}\right)\\&=\frac{s_p}{n+1}\end{aligned}$$

である。よって $q=n+1$ である。

(答) $q=n+1$

(e)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{n+1}}{n(n+1)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)s_{n+1}\end{aligned}$$

である。(b)より

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)s_{n+1}\\&=2\end{aligned}$$

である。

(答) 2

2

(1)

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 + 3ax^2 + (3a^2 - a)x \\ &= x(x^2 + 3ax + 3a^2 - a)\end{aligned}$$

となる。 $f(x)=0$ は $x=0$ を必ず解としてもつ。よって $k=1$ となるのは次の2通りが考えられる。以下 $g(x)=x^2+3ax+3a^2-a$ とおく。

[1] $g(x)=0$ が実数解を持たない場合

このとき $g(x)=0$ の判別式を D として $D<0$ となればよい。よって

$$\begin{aligned}D &< 0 \\ \Leftrightarrow (3a)^2 - 4(3a^2 - a) &< 0 \\ \Leftrightarrow -a(3a - 4) &< 0 \\ \Leftrightarrow a < 0, a > \frac{4}{3}\end{aligned}$$

であればよい。

[2] $g(x)=0$ が $x=0$ のみを実数解としてもつ。

$g(0)=0$ のとき

$$\begin{aligned}3a^2 - a &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 0, \frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。

$a=0$ のとき $g(x)=x^2$ となり条件を満たす。

$a=\frac{1}{3}$ のとき $g(x)=x^2+x$ となり $x=-1$ を解にもち条件を満たさない。

[1][2]より求める範囲は

$$a \leq 0, a > \frac{4}{3}$$

である。

(答) $a \leq 0, a > \frac{4}{3}$

(2)

$k=2$ となるとき、次の2通りが考えられる。

[1] $g(x)=0$ が $x=0$ 以外の重解を持つ。

このとき $D=0$ かつ $a \neq 0, \frac{1}{3}$ となればよい。

$D=-a(3a-4)$ であるから

$$a = \frac{4}{3}$$

である。

[2] $g(x)=0$ が $x=0$ とそれ以外の解を1つもつ。

$g(0)=0$ のとき $a=0, \frac{1}{3}$ であり、(1)より $x=0$ 以外の解を持つのは $a=\frac{1}{3}$ のときである。

以上より求める範囲は $a=\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$ である。

(答) $a=\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$

(3)

$k=3$ となるとき、 $g(x)=0$ が $x=0$ 以外の2つの異なる実数解をもてばよい。

よって $D>0$ かつ $a \neq 0, \frac{1}{3}$ となればよい。

$$\begin{aligned}D &> 0 \\ \Leftrightarrow 0 &< a < \frac{4}{3}\end{aligned}$$

であるから求める範囲は

$$0 < a < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < a < \frac{4}{3}$$

である。

(答) $0 < a < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < a < \frac{4}{3}$

(4)

(a)

$$g(x) = \left(x + \frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 - a$$

と変形できるから $y=g(x)$ のグラフの軸は $x=-\frac{3}{2}a$ である。 $0 < a < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < a < \frac{4}{3}$ であるから軸の x 座標は負である。よって少なくとも $g(x)=0$ の小さい方の解は負である。よって

$a < 0$ である。

証明終

(b)

軸の x 座標は負であるから $g(0)>0$ であれば良いので

$$\begin{aligned}g(0) &> 0 \\ \Leftrightarrow 3a^2 - a &> 0 \\ \Leftrightarrow a &< 0, a > \frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。 $0 < a < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < a < \frac{4}{3}$ との共通範囲を求めて

$$\frac{1}{3} < a < \frac{4}{3}$$

である。

(答) $\frac{1}{3} < a < \frac{4}{3}$

(c)

軸の x 座標は負であるから $g(0)<0$ であれば良いので

$$\begin{aligned}g(0) &< 0 \\ \Leftrightarrow 3a^2 - a &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 &< a < \frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。 $0 < a < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < a < \frac{4}{3}$ との共通範囲を求めて

$$0 < a < \frac{1}{3}$$

である。

(答) $0 < a < \frac{1}{3}$

(5)

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3a^2 - a$$

である。 $f(x)$ が極大値と極小値をもつとき、 $f'(x)$ の符号が正から負になることと負から正になることがどちらも存在すればよい。すなわち $f'(x)=0$ が2つの異なる実数解をもてば良い。

$f'(x)=0$ の判別式を D' とおくと $D'>0$ であればよいから、

$$\begin{aligned}\frac{D'}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow (3a)^2 - 3(3a^2 - a) &> 0 \\ \Leftrightarrow a &> 0\end{aligned}$$

となる。

(答) $a > 0$

(6)

$f'(x)=0$ を解いて $x=\frac{-3a\pm\sqrt{3a}}{3}$ である。このうち極小値をとるのは $x=\frac{-3a+\sqrt{3a}}{3}$ のときである。よって

$$\begin{aligned}m(a) &= f\left(\frac{-3a+\sqrt{3a}}{3}\right) \\ &= \left(\frac{-3a+\sqrt{3a}}{3}\right)^3 + 3a\left(\frac{-3a+\sqrt{3a}}{3}\right)^2 + (3a^2 - a) \cdot \frac{-3a+\sqrt{3a}}{3} \\ &= -a^3 + a^2 - \frac{2}{9}a\sqrt{3a}\end{aligned}$$

である。ここで $m(a)$ を a について微分すると

$$\begin{aligned}m'(a) &= -3a^2 + 2a - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{a} \\ &= -\sqrt{a}\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(3a + \sqrt{3a} - 1)\end{aligned}$$

となる。ここで $a>0$ より $m'(a)=0$ とおくと $a=\frac{1}{3}$ または $3a+\sqrt{3a}-1=0$ である。

$3a+\sqrt{3a}-1=0$ のとき $\sqrt{a}=t$ とおいて

$$\begin{aligned}3t^2 + \sqrt{3}t - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{15}}{6}\end{aligned}$$

である。 $t>0$ より $t=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$ である。すなわち

$$\begin{aligned}a &= t^2 \\ &= \left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\right)^2 \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{6}\end{aligned}$$

である。よって $m(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	0	...	$\frac{3-\sqrt{5}}{6}$	...	$\frac{1}{3}$	...
$m'(a)$		-	0	+	0	-
$m(a)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$m(0)=0, m\left(\frac{1}{3}\right)=0$ より $m(a)$ は $a=\frac{1}{3}$ で最大値をとり、その値は、

$$m\left(\frac{1}{3}\right)=0$$

である。

(答) $a=\frac{1}{3}$ で最大値0