

1

【解答】

(1)	アイ	36	ウエオ	120	カキク	117	
(2)	ア	1	イ	5	ウ	1	エオ 10
	カ	6	キ	1	クケ	10	
(3)	ア	5	イ	2	ウ	3	エ 2
	オ	3	カ	2	キ	3	ク 2
	ケコ	15	サ	4	シス	15	セ 4
	ソタ	15	チ	8	ツ	5	

【解説】

(1)

(a)

$$A=a-1, B=b-1, C=c-1$$

とおくと、

$$a+b+c=10, a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1, a, b, c \text{ は整数}$$

$$\Leftrightarrow A+B+C=7, A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0, A, B, C \text{ は整数}$$

となる。したがって、求める場合の数は A, B, C の中から重複を許して 7 個選ぶ場合の数に等しく、

$${}_3H_7 = {}_9C_7 = 36$$

である。

(b)

$a+b+c=3, 4, \dots, 10$ の場合の数の和を考えて、求める場合の数は

$$\begin{aligned} &{}_3H_0 + {}_3H_1 + {}_3H_2 + {}_3H_3 + {}_3H_4 + {}_3H_5 + {}_3H_6 + {}_3H_7 \\ &= {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 + {}_7C_5 + {}_8C_6 + {}_9C_7 \\ &= 120 \end{aligned}$$

である。

(c)

(b) の組のうち、 a, b, c のうち少なくとも 1 つが 8 以上である組は

$$(a, b, c) = (1, 1, 8), (1, 8, 1), (8, 1, 1)$$

の 3 通りのみであるから、求める場合の数は

$$120 - 3 = 117$$

である。

(2)

(a)

$\angle B = 2\angle A$ であるから

$$\angle C = \pi - \angle A - \angle B$$

$$= \pi - 3\angle A$$

である。よって

$$\begin{aligned} \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} &= \frac{\sin 2A + \sin(\pi - 3A)}{\sin A} \\ &= \frac{2\sin A \cos A + 3\sin A - 4\sin^3 A}{\sin A} \\ &= 2\cos A + 3 - 4\sin^2 A \\ &= 4\cos^2 A + 2\cos A - 1 \\ &= 4\left(\cos A + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\angle C = \pi - 3\angle A > 0$ でなければならないから $0 < \angle A < \frac{\pi}{3}$ である。したがって、

$$\frac{1}{2} < \cos A < 1 \text{ であるから、}$$

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{4} &< \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} < 4\left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{4} \\ \therefore 1 &< \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} < 5 \end{aligned}$$

となる。

(b)

正弦定理より、

$$\begin{aligned} \frac{\sin B}{AC} &= \frac{\sin C}{AB} \\ \Leftrightarrow \frac{2\sin A \cos A}{3} &= \frac{3\sin A - 4\sin^3 A}{2} \\ \Leftrightarrow 4\cos A &= 9 - 12\sin^2 A \quad (\because \sin A > 0) \\ \Leftrightarrow 12\cos^2 A - 4\cos A - 3 &= 0 \\ \therefore \cos A &= \frac{1 \pm \sqrt{10}}{6} \end{aligned}$$

となるが、 $\frac{1}{2} < \cos A < 1$ より $\cos A = \frac{1 + \sqrt{10}}{6}$ である。また、余弦定理より、

$$\begin{aligned} BC^2 &= AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cos A \\ &= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1 + \sqrt{10}}{6} \\ &= 11 - 2\sqrt{10} \\ &= (\sqrt{10} - 1)^2 \end{aligned}$$

である。 $BC > 0$ であるから $BC = \sqrt{10} - 1$ である。

(3)

(a)

直線 l の方程式は $y = -\frac{1}{2}x + 2$ である。これと C の方程式から y を消去して

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x + 2 &= -x^2 + mx + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - \left(m + \frac{1}{2}\right)x + 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。①が異なる 2 つの実数解をもつとき C と l は異なる 2 点で交わるから、①の判別式を

D とすると、

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow m + \frac{1}{2} &< -2, 2 < m + \frac{1}{2} \\ \therefore m &< -\frac{5}{2}, m > \frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

であればよい。

(b)

①の解が交点の x 座標であるから、①が $0 \leq x \leq 4$ の範囲で少なくとも 1 個解をもてばよい。

$$f(x) = x^2 - \left(m + \frac{1}{2}\right)x + 1$$

とおく。放物線 $y = f(x)$ の軸は直線 $x = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right)$ であることに注意する。以下、条件②の

もとで考える。

$$[1] \quad \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right) \leq 0 \quad \therefore m < -\frac{5}{2} \text{ のとき}$$

$f(0) = 1 > 0$ より、①は $0 \leq x \leq 4$ の範囲で解を持たないので不適である。

$$[2] \quad 0 < \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right) < 4 \quad \therefore \frac{3}{2} < m < \frac{15}{2} \text{ のとき}$$

$f(0) > 0, f\left(\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right) < 0$ より、①は $0 \leq x \leq 4$ の範囲で解を持つので適する。

$$[3] \quad \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right) \geq 4 \quad \therefore m \geq \frac{15}{2} \text{ のとき}$$

$f(0) > 0, f(4) = -4m + 15 < 0$ より、①は $0 \leq x \leq 4$ の範囲で解を持つので適する。

以上より求める範囲は $m > \frac{3}{2}$ である。

(c)

①が $0 \leq x \leq 4$ の範囲で 2 解をもてばよい。したがって、求める m の範囲は

$$\textcircled{2} \text{ かつ } 0 < \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right) < 4 \text{ かつ } f(0) \geq 0 \text{ かつ } f(4) \geq 0$$

$$\therefore \frac{3}{2} < m \leq \frac{15}{4}$$

である。直線 PQ の傾きは $-\frac{1}{2}$ であるから、①の 2 解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、 PQ の長さ L

は

$$L = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} (\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{2} (\beta - \alpha)$$

とおける。したがって、

$$L^2 = \frac{5}{4} (\beta - \alpha)^2 = \frac{5}{4} \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}$$

である。ここで解と係数の関係から $\alpha + \beta = m + \frac{1}{2}, \alpha\beta = 1$ であるから

$$L^2 = \frac{5}{4} \left\{ \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \right\}$$

と表せる。 $\frac{3}{2} < m \leq \frac{15}{4}$ であるから、 $m = \frac{15}{4}$ のとき L^2 は最大値 $\frac{1125}{64}$ をとる。よって L の最

大値は $\frac{15}{8}\sqrt{5}$ である。

(1)

対数微分法を用いる。 $x > 0$ より両辺とも正なので、両辺の自然対数をとると

$$\begin{aligned}\log y &= \log x^{\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} \log x\end{aligned}$$

である。両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) x^{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \log x + 1 \right) x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}y' &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log x + 1 &= 0 & \left(\because x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}} > 0 \right) \\ \therefore x &= e^{-2}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y' = \left(\frac{1}{2} \log x + 1 \right) x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}, \quad y' = 0 \text{ のとき } x = e^{-2}$$

(2)

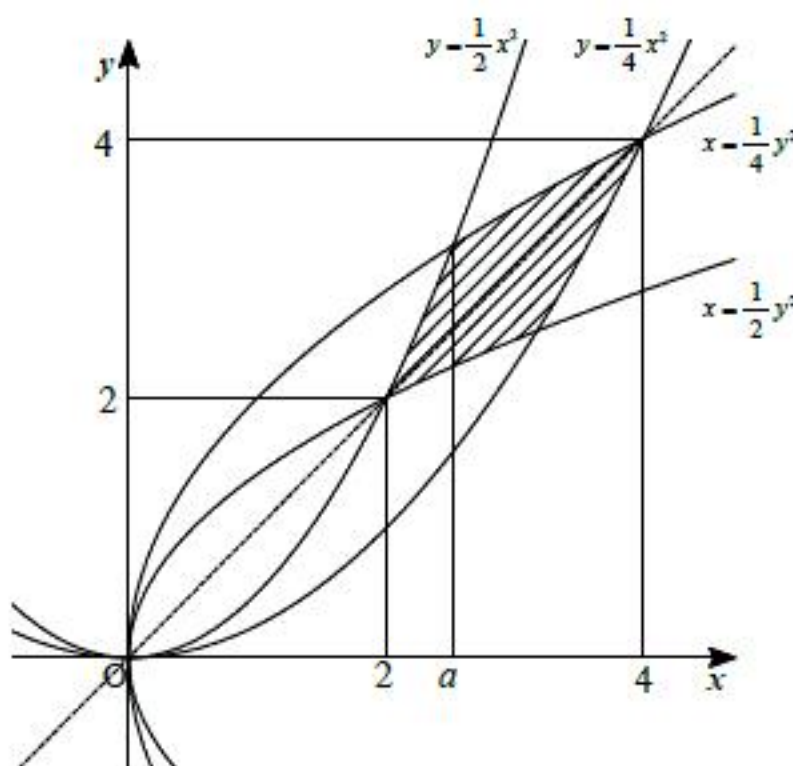
$x > 0, y > 0$ のもとでは、 $y = \frac{1}{4}x^2$ と $x = \frac{1}{4}y^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ と $x = \frac{1}{2}y^2$ はそれぞれ逆関数の関係

にある。したがって、これらの曲線はそれぞれ直線 $y = x$ に関して対称であるから、 $y = \frac{1}{4}x^2$

と $x = \frac{1}{4}y^2$ の交点の座標は、

$$\begin{aligned}\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ y = x \end{cases} \\ \therefore (x, y) = (4, 4) & \quad (\because x > 0, y > 0)\end{aligned}$$

である。同様に、 $y = \frac{1}{2}x^2$ と $x = \frac{1}{2}y^2$ の交点の座標は、 $(2, 2)$ となる。したがって、求める面積は下図の斜線部分の面積である。



$y = \frac{1}{2}x^2$ と $x = \frac{1}{4}y^2$ の交点の x 座標のうち、0 でないものを a とおくと、

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}a^2, \quad a = \frac{1}{4}y^2 \\ \therefore a^3 &= 16 & (\because a \neq 0)\end{aligned}$$

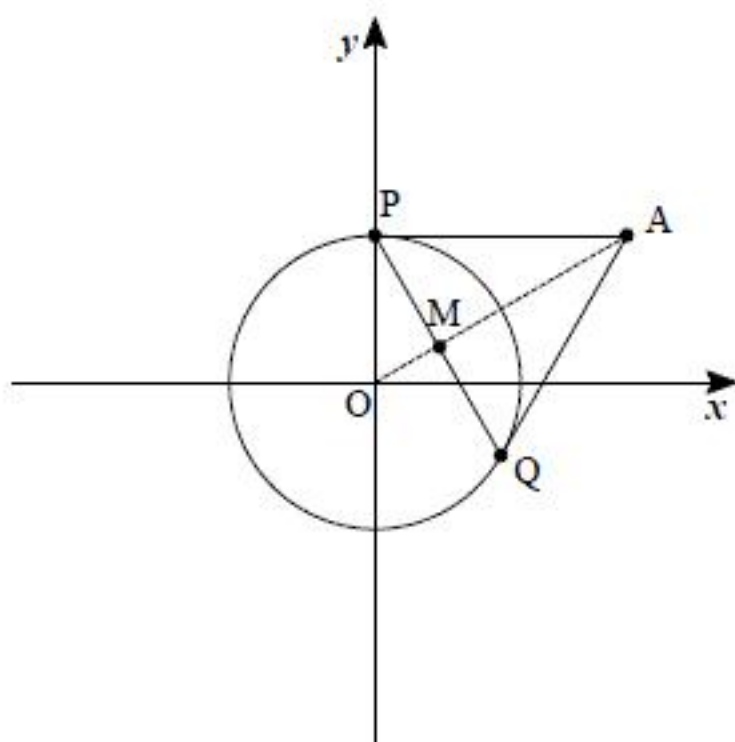
である。対称性を考えると、求める面積は、 $y = x$ よりも上の部分の面積を二倍すればよく、

$$\begin{aligned}& 2 \int_2^a \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) dx + 2 \int_a^4 (2\sqrt{x} - x) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_2^a + 2 \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_a^4 \\ &= \frac{20}{3} + \frac{1}{3}a^3 - \frac{8}{3}a^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{20}{3} + \frac{16}{3} - \frac{8}{3} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{3}$$

(1)



$\triangle OPA$ と $\triangle OMP$ において $\angle AOP$ は共通, $\angle APO = \angle PMO = 90^\circ$ であるから, $\triangle OPA$ と $\triangle OMP$ は相似である。よって,

$$\begin{aligned} OP : OM &= OA : OP \\ \Leftrightarrow OM &= \frac{OP^2}{OA} = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

である。また, 点 M は半直線 OA 上に存在するから

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{OM}{OA} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と表せる。したがって,

$$s = \frac{4a}{a^2 + b^2}, t = \frac{4b}{a^2 + b^2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{4a}{a^2 + b^2}, t = \frac{4b}{a^2 + b^2}$$

(2)

$b \neq 0$ のとき, (1) より,

$$\frac{s}{t} = \frac{a}{b}$$

である。また,

$$\begin{aligned} s &= \frac{4 \cdot \frac{a}{b}}{b \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 1 \right\}} \Leftrightarrow b = \frac{4 \cdot \frac{s}{t}}{s \left\{ \left(\frac{s}{t} \right)^2 + 1 \right\}} \\ \therefore b &= \frac{4t}{s^2 + t^2}, a = \frac{4s}{s^2 + t^2} \end{aligned}$$

である。ここで, (1) より $b = 0$ のとき $t = 0$ であるから, $b = 0$ でも上式は成り立つ。
条件より $2a + 3b = 12$ であるから,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{4s}{s^2 + t^2} + 3 \cdot \frac{4t}{s^2 + t^2} &= 12 \\ \Leftrightarrow s^2 - \frac{2}{3}s + t^2 - t &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(s - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 &= \frac{13}{36} \end{aligned}$$

となる。また, s, t を同時に 0 にする a, b は存在しないので $(s, t) = (0, 0)$ は除かれる。
以上より求める軌跡は,

$$\text{円} \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{13}{36} \text{ から原点を除いた部分}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{円} \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{13}{36} \text{ から原点を除いた部分}$$