

1

【解答】

(1)

ア 1 イ 8 ウ 1 エ 4 オ 5
カ 1 キ 6 ク 9 ケ 3 コ 1
サ 6

(2)

ア 9 イ 0 ウ 1 エ 8 オ 0
カ 1 キ 3 ク 5 ケ 1 コ 8
サ 0 シ 1 ス 5 セ 0

(3)

ア 9 イ 3 ウ 1 エ 4 オ 3
カ 2 キ 2 ク 3 ケ 9 コ 8
サ 4 シ 3 ス 9

【解説】

(1)

(a)

4回目で終了するとき、投げた硬貨の表裏が全て一致すればよいから、

$$p_4=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$$

と求まる。5回目で終了するとき、最初の4回のうち1回だけ表裏が異なればよいから、

$$p_5=2\cdot{}_4C_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{4}$$

と求まる。7回目で終了するとき、最初の6回までに表と裏が3回ずつ出ればよいから、

$$p_7=2\cdot{}_6C_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{5}{16}$$

と求まる。

(b)

(a)と同様にすると、

$$p_6=2\cdot{}_5C_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{16}$$

である。このゲームは7回目までに必ず終了するから、求める期待値は

$$\begin{aligned} &4\cdot\frac{1}{8}+5\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{5}{16}+7\cdot\frac{5}{16} \\ &=\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+\frac{65}{16} \\ &=\frac{93}{16} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

(a)

与式が異なる2つの実数解をもつ条件は、与式の判別式を D とすると、

$$D=\left(\sqrt{2}\sin 2\theta\right)^2-4\cdot 2\cos \theta >0$$

である。したがって、上式を変形していくと、

$$\left(\sqrt{2}\sin 2\theta\right)^2-4\cdot 2\cos \theta >0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2\theta-8\cos \theta >0$$

$$\Leftrightarrow 2(2\sin \theta \cos \theta)^2-8\cos \theta >0$$

$$\Leftrightarrow 8\cos \theta (\sin^2 \theta \cos \theta -1) >0$$

となる。ここで、

$$-1<\sin^2 \theta \cos \theta <1$$

であるから、

$$\sin^2 \cos \theta -1 <0$$

である。したがって、 $D > 0$ となるためには、

$$\cos \theta <0$$

が必要である。今、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから、

$$\cos \theta <0 \Leftrightarrow 90^\circ < \theta \leq 180^\circ$$

となる。以上より、求める θ の範囲は、

$$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$$

である。

(b)

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\sqrt{2}\sin 2\theta \\ \alpha \beta = 2\cos \theta \end{cases}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} \\ &= -\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}\cos \theta} \\ &= -\frac{2\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}\cos \theta} \\ &= -\sqrt{2}\sin \theta \end{aligned}$$

となる。よって、 $a_n = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^{n-1}$ とおくと、 $\{a_n\}$ は初項1公比 $-\sqrt{2}\sin \theta$ の等比数列である。

a_n の1~ n までの和を S_n とおくと、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \frac{1\cdot\left\{1-\left(-\sqrt{2}\sin \theta\right)^n\right\}}{1+\sqrt{2}\sin \theta} \\ &= \frac{1-\left(-\sqrt{2}\sin \theta\right)^n}{1+\sqrt{2}\sin \theta} \end{aligned}$$

である。これが収束する条件は、

$$\begin{cases} -1 < -\sqrt{2}\sin \theta \leq 1 \\ 1+\sqrt{2}\sin \theta \neq 0 \end{cases}$$

であるが、

$$1+\sqrt{2}\sin \theta =0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となり、 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ を満たさないので、収束条件は、

$$-1 < -\sqrt{2}\sin \theta \leq 1$$

である。これを变形していくと、

$$-1 < -\sqrt{2}\sin \theta \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 135^\circ < \theta \leq 180^\circ \quad (\because 90^\circ < \theta \leq 180^\circ)$$

と求まる。

(c)

(b)より、 S_n が収束するとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}\sin \theta}$$

であるから、これが $2-\sqrt{2}$ に等しくなる θ を求めればよい。

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sqrt{2}\sin \theta} &= 2-\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow 1+\sqrt{2}\sin \theta &= \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \sin \theta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので、 $135^\circ < \theta \leq 180^\circ$ に注意すると、

$$\theta = 150^\circ$$

と求まる。

(3)

(a)

P, Q はそれぞれ辺 OA, OB 上に存在するから、実数 p, q ($0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$)を用いて

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OQ} = q\overrightarrow{OB} \end{cases}$$

と表せる。点Dは辺PQ上に存在するから、実数 s ($0 \leq s \leq 1$)を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= s\overrightarrow{OP} + (1-s)\overrightarrow{OQ} \\ &= sp\overrightarrow{OA} + (1-s)q\overrightarrow{OB} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表せる。また、条件より、

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{9}\overrightarrow{OB} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

であるから、①と②の右辺を比較して、

$$\begin{cases} sp = \frac{1}{9} \\ (1-s)q = \frac{2}{9} \end{cases}$$

となる。この2式から s を消去して整理すると、

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 9 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

と求まる。以上より、

$$\frac{\text{OA}}{\text{OP}} + 2 \times \frac{\text{OB}}{\text{OQ}} = \frac{1}{p} + 2 \times \frac{1}{q} = 9$$

となる。

(b)

OP=1のとき、

$$p = \frac{1}{2}$$

である。これを③式に代入すると、

$$2 + \frac{2}{q} = 9$$

$$\therefore q = \frac{2}{7}$$

と求まる。したがって、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \cdot \sin \angle \text{POQ} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot q \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \sin \angle \text{AOB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{7} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3}{14} \sqrt{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(c)

$$\begin{aligned} \text{OP} + \text{OQ} &= p\text{OA} + q\text{OB} \\ &= 2p + 3q (=k \text{ とおく}) \end{aligned}$$

であるから、

$$2p + 3q = k$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{k-2p}{3}$$

と変形できる。また、③を q について解くと、

$$q = \frac{2p}{9p-1}$$

となるから、これらの2式から q を消去して、 k について解くと、

$$\frac{k-2p}{3} = \frac{2p}{9p-1}$$

$$\Leftrightarrow k-2p = \frac{6p}{9p-1}$$

$$\therefore k = \frac{18p^2+4p}{9p-1}$$

となる。したがって、 $0 \leq p \leq 1$ の範囲で k が最小となるような p を求めればよい。

$$f(p) = \frac{18p^2+4p}{9p-1} \text{ とおくと、}$$

$$\begin{aligned} f'(p) &= \frac{(36p+4)(9p-1) - (18p^2+4p) \cdot 9}{(9p-1)^2} \\ &= \frac{2(81p^2-18p-2)}{(9p-1)^2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(p) &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{9 \pm \sqrt{81+81 \cdot 2}}{81} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $0 \leq p \leq 1$ における $f(p)$ の増減表は下のようになる。

p	0	...	$\frac{1+\sqrt{3}}{9}$	...	1
$f'(p)$		—	0	+	
$f(p)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって $f(p)$ が最小となるとき p は

$$p = \frac{1+\sqrt{3}}{9}$$

である。③より、このとき、

$$\frac{9}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{q} = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}(\sqrt{3}-1) + \frac{2}{q} = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{q} = \frac{9}{2}(3-\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{9}{4} \cdot \frac{6}{3+\sqrt{3}}$$

$$\therefore q = \frac{2(3+\sqrt{3})}{27}$$

となる。以上より、このときのOPの長さは、

$$\text{OP} = p\text{OA} = \frac{2+2\sqrt{3}}{9}$$

となり、

$$\begin{aligned} \text{OP} + \text{OQ} &= \frac{2+2\sqrt{3}}{9} + 3q \\ &= \frac{2+2\sqrt{3}}{9} + \frac{6+2\sqrt{3}}{9} \\ &= \frac{8+4\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

と求まる。

2

(1)

(a)

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{12} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\pi}{12} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \cos\frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{12} &= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(答) f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin 3x + \sin 2x - \sin x \\ &= -3\sin x + 4\sin^3 x + 2\sin x \cos x - \sin x \\ &= 2\sin x(2\sin^2 x + \cos x - 2) \\ &= 2\sin x \cos x(1 - 2\cos x) \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{5}{12}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

増減表より、 $f(x)$ の極大値は $\frac{1}{2}$ 、極小値は $\frac{5}{12}$ である。

$$(答) \text{極大値 } \frac{1}{2}, \text{極小値 } \frac{5}{12}$$

(2)

直線 $y=-x+1$ 上の点 $(s, -s+1)$ が f によって移る点は、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ -s+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b)s+b \\ (c-d)s+d \end{pmatrix}$$

である。この点が直線 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ 上にある条件は、

$$(c-d)s+d = -\frac{2}{3}(a-b)s - \frac{2}{3}b + \frac{7}{3}$$

である。上式が任意の s に対して成り立つので、

$$c-d = -\frac{2}{3}(a-b), d = -\frac{2}{3}b + \frac{7}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。同様に、直線 $y=2x-1$ 上の点 $(t, 2t-1)$ が f によって移る点は、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+2b)t-b \\ (c+2d)t-d \end{pmatrix}$$

である。この点が直線 $x=1$ 上にある条件は、

$$(a+2b)t-b=1$$

である。上式が任意の t に対して成り立つので、

$$\begin{aligned} a+2b &= 0, -b=1 \\ \Leftrightarrow a &= 2, b=-1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。②を①に代入して解くと、

$$\begin{aligned} c-d &= -2, d=3 \\ \Leftrightarrow c &= 1, d=3 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

を得る。②、③より、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

である。

$$(答) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3

(1)

実数 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ を用いて点 P, Q の座標をそれぞれ $P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ とおくことができ、

このとき、

$$PQ = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\beta^2 - \alpha^2)^2} = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 \{1 + (\alpha + \beta)^2\}}$$

と表せる。線分 PQ の中点 M(a, b) は、

$$a = \frac{\alpha + \beta}{2}$$
$$b = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} (> 0)$$

を満たすので、

$$\alpha + \beta = 2a$$
$$\alpha\beta = \frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{2} = \frac{(2a)^2 - 2b}{2} = 2a^2 - b$$

が成り立つ。

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (2a)^2 - 4(2a^2 - b) = -4a^2 + 4b$$

より、

$$PQ = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 \{1 + (\alpha + \beta)^2\}}$$
$$= \sqrt{(-4a^2 + 4b) \{1 + (2a)^2\}}$$
$$= 2\sqrt{(b - a^2)(1 + 4a^2)} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表すことができる。 $a = 1, b = 3$ のとき、

$$PQ = 2\sqrt{(3 - 1^2)(1 + 4 \cdot 1^2)} = 2\sqrt{10}$$

である。

(答) $PQ = 2\sqrt{10}$

(2)

$PQ = 4$ のとき、 $\textcircled{1}$ より、

$$2\sqrt{(b - a^2)(1 + 4a^2)} = 4$$
$$\Leftrightarrow (b - a^2)(1 + 4a^2) = 4$$
$$\Leftrightarrow b = a^2 + \frac{4}{4a^2 + 1}$$

となる。

(答) $b = a^2 + \frac{4}{4a^2 + 1}$

(3)

$$b = \frac{1}{4}(4a^2 + 1) - \frac{1}{4} + \frac{4}{4a^2 + 1}$$
$$= \frac{1}{4}(4a^2 + 1) + \frac{4}{4a^2 + 1} - \frac{1}{4}$$

相加相乗平均の関係から、

$$b \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}(4a^2 + 1) \cdot \frac{4}{4a^2 + 1}} - \frac{1}{4}$$
$$= 2 - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{7}{4}$$

となる。等号は、

$$\frac{1}{4}(4a^2 + 1) = \frac{4}{4a^2 + 1}$$
$$\Leftrightarrow (4a^2 + 1)^2 = 16$$
$$\Leftrightarrow 4a^2 + 1 = 4 \quad (\because 4a^2 + 1 > 0)$$
$$\Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

のときに成立する。以上から、求める b の最小値は、

$$\frac{7}{4}$$

である。

(答) $\frac{7}{4}$