

1

【解答】

- (1) ア 3 イ 1 ウ 1 エ 1
 オ 2 カ 1 キ 1 ク 4
 ケ 3 コ 1 サ 1 シ 4
 ス 1 セ 3
 (2) ソ 5 タ 2 チ 2 ツ 5

【解説】

- (1) 仮定より

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} + \alpha \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \\ &= 4a_n + \left(\frac{1}{3} \right)^n + \alpha \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \\ &= 4 \left\{ b_n - \alpha \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} + \left(\frac{1}{3} \right)^n + \alpha \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \\ &= 4b_n + (3-11\alpha) \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。よって b_n が等比数列の場合

$$3-11\alpha=0$$

がなりたつから、これを変形して

$$\alpha = \frac{3}{11}$$

を得る。このとき①式より

$$b_{n+1} = 4b_n$$

であるから、これを変形して

$$\begin{aligned} b_n &= 4^{n-1} b_1 \\ &= 4^{n-1} \left(a_1 + \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{3} \right) \\ &= 4^{n-1} \cdot \frac{12}{11} \\ &= \frac{3 \cdot 4^n}{11} \end{aligned}$$

となる。よって $\{b_n\}$ は初項 $\frac{12}{11}$ 、公比 4 の等比数列である。これより

$$\begin{aligned} a_n &= b_n - \frac{3}{11} \left(\frac{1}{3} \right)^n \\ &= \frac{3 \cdot 4^n}{11} - \frac{3}{11} \left(\frac{1}{3} \right)^n \\ &= \frac{3}{11} \left\{ 4^n - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。

- (2)

まず $a_n > 0$ であることを示す。 $a_1 > 0$ は仮定より明らかである。 $a_n > 0$ であるとき、 a_n の漸化式

$$5^{n+1} a_{n+1} + 24 a_{n+1} a_n - 5^n a_n = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

を変形して

$$\begin{aligned} 5^{n+1} a_{n+1} + 24 a_{n+1} a_n &= 5^n a_n \\ \Rightarrow 5^{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n} + 24 a_{n+1} &= 5^n \\ \Rightarrow \left(\frac{5^{n+1}}{a_n} + 24 \right) a_{n+1} &= 5^n \\ \Rightarrow a_{n+1} &= \frac{5^n}{\frac{5^{n+1}}{a_n} + 24} \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+1} > 0$$

となる。以上のことより帰納的にすべての自然数 n に対して $a_n > 0$ である。ここで漸化式②

の両辺を $5^n a_{n+1} a_n$ で割って、 $c_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{5}{a_n} + \frac{24}{5^n} - \frac{1}{a_{n+1}} &= 0 \\ \Rightarrow c_{n+1} &= 5c_n + \frac{24}{5^n} \end{aligned}$$

となる。次に、(1)と同様に $d_n = c_n + \alpha \left(\frac{1}{5} \right)^n$ とおき、上の式を代入すると

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= c_{n+1} + \alpha \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} \\ &= 5c_n + \frac{24}{5^n} + \alpha \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} \\ &= 5 \left\{ d_n - \alpha \left(\frac{1}{5} \right)^n \right\} + \frac{24}{5^n} + \alpha \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} \\ &= 5d_n + (120-24\alpha) \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

となる。 $\alpha=5$ とおけば、 $\{d_n\}$ は $d_{n+1} = 5d_n$ を満たす等比数列となるから

$$\begin{aligned} d_n &= 5^{n-1} d_1 \\ &= 5^{n-1} \left\{ c_1 + 5 \cdot \left(\frac{1}{5} \right) \right\} \\ &= 5^{n-1} \left(\frac{1}{a_1} + 1 \right) \\ &= 2 \cdot 5^{n-1} \end{aligned}$$

となる。よって c_n は

$$\begin{aligned} c_n &= d_n - \alpha \left(\frac{1}{5} \right)^n \\ &= 2 \cdot 5^{n-1} - \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

となり、 a_n は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{c_n} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 5^{n-1} - \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}} \\ &= \frac{5^{n-1}}{2 \cdot 25^{n-1} - 1} \end{aligned}$$

となる。

2

【解答】

- (1) ア 1 イ 1
 (2) ウ 1 エ 1 オ 1 カ 0
 (3) キ 6
 (4) ク 1 ケ 4 コ 0 サ 0
 シ 4
 (5) ス 2 セ 8 ソ 1 タ 0
 チ 4

【解説】

- (1) 仮定より

$$\begin{aligned}abcd &= acbd \\&= \frac{1}{\{(1+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(1+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}} \times \frac{1}{\{(1-\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(1-\sqrt{3})-\sqrt{5}\}} \\&= \frac{1}{\{(1+\sqrt{3})^2-5\}} \times \frac{1}{\{(1-\sqrt{3})^2-5\}} \\&= \frac{1}{-(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)} \\&= -\frac{1}{11}\end{aligned}$$

となる。

- (2) $1 < \sqrt{3} < \sqrt{5}$ かつ $1 + \sqrt{3} - \sqrt{5} > 0$ であることから
 $1 + \sqrt{3} + \sqrt{5} > 1 - \sqrt{3} + \sqrt{5} > 1 + \sqrt{3} - \sqrt{5} > 0 > 1 - \sqrt{3} - \sqrt{5}$
 となり

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c} > 0 > \frac{1}{d} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $abcd = -\frac{1}{11} < 0$ であるから、 abc, abd, acd, bcd のうち最小値を取るものは

$\frac{abcd}{a} = bcd$ である。これを計算すると

$$\begin{aligned}bcd &= \frac{abcd}{a} \\&= -\frac{1}{11} \times (1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}) \\&= \frac{-1 - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{11}\end{aligned}$$

となる。

- (3) 不等式①より

$$c > b > a > d \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで②式より

$$\begin{aligned}ad + bc - (ac + bd) &= (a - b)(c - d) > 0 \\ac + bd - (ab + cd) &= (a - d)(c - b) > 0\end{aligned}$$

となるから、 $ad + bc > ac + bd > ab + cd$ である。 $ab + cd$ の値を計算すると

$$\begin{aligned}ab + cd &= \frac{1}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}} \times \frac{1}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{1 + \sqrt{3} - \sqrt{5}} \times \frac{1}{1 - \sqrt{3} - \sqrt{5}} \\&= \frac{1}{(1 + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(1 - \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} \\&= \frac{1}{3 + 2\sqrt{5}} + \frac{1}{3 - 2\sqrt{5}} \\&= \frac{3 + 2\sqrt{5} + 3 - 2\sqrt{5}}{3^2 - (2\sqrt{5})^2} \\&= -\frac{6}{11}\end{aligned}$$

となる。

- (4) 不等式②より、6つの式のうち最小値を与えるものは $a + d$ である。これを計算すると

$$\begin{aligned}a + d &= \frac{1}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{1 - \sqrt{3} - \sqrt{5}} \\&= \frac{2}{1^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2} \\&= \frac{2}{-2\sqrt{15} - 7} \\&= -2 \times \frac{2\sqrt{15} - 7}{(2\sqrt{15} - 7)(2\sqrt{15} + 7)} \\&= \frac{14 - 4\sqrt{15}}{11}\end{aligned}$$

となる。

- (5) $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 1$

とおく。

$$\begin{aligned}\alpha &= a + b + c + d \\&= \frac{1}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{1 + \sqrt{3} - \sqrt{5}} + \frac{1}{1 - \sqrt{3} - \sqrt{5}} \\&= -\frac{28}{11}\end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned}\beta &= ab + ac + ad + bc + bd + cd \\&= \frac{10}{11} \\ \gamma &= abc + acd + abd + bcd \\&= \frac{4}{11}\end{aligned}$$

となる。

【解答】

- (1) ア 0 イ 4 ウ 1 エ 5
 オ 1 カ 9 キ 3 ク 1
 ケ 4
- (2) コ 2 サ 1 シ 7 ス 1
 セ 2 ソ 9 タ 6
- (3) チ 1 ツ 6 テ 2 ト 3

【解説】

規則(A)が適用される確率は $\frac{1}{2}$ 、規則(B)が適用される確率は $\frac{1}{6}$ 、規則(C)が適用される確率は $\frac{1}{3}$ である。

(1)

$a+b$ の取りうる値の範囲は、仮定より0以上4以下である。よって規則(A)が a 回適用されたとき、規則(B)が適用される回数は0以上 $4-a$ 以下となる。 a の取りうる値の範囲は0以上4以下であるから、求める a, b の組み合わせは

$$\sum_{a=0}^4 (4-a+1) = 25 - 10 = 15$$

より15通りとなる。また、 $a=1, b=1$ となる確率は、

$${}_4P_2 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

である。この時のPの座標の値は、定義より $-1+0+2+2=3$ である。また、 $a=1$ となる確率は

$${}_4P_1 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{4}$$

である。

(2)

試行を4回繰り返したのちにPが原点にある場合は、次の2通りがある。

- [1] $a=0, b=4$
 [2] $a=2, b=1$

[1]の確率は

$$\left(\frac{1}{6} \right)^4 = \frac{1}{1296}$$

であり、[2]の確率は

$${}_4P_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

である。よって、求める確率はこれらを足し合わせることによって

$$\frac{1}{1296} + \frac{1}{6} = \frac{217}{1296}$$

となる。

(3)

試行を一回だけ行った時の期待値は

$$(-1) \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

となる。試行を4回繰り返したとき、Pの座標の値と確率の関係は以下ようになる。

座標値	-4	-3	-2	-1	0	1
確率	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{19}{108}$	$\frac{217}{1296}$	$\frac{1}{18}$

座標値	2	3	4	5	6	8
確率	$\frac{14}{81}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{81}$

よって求める期待値は

$$\begin{aligned} & (-4) \times \frac{1}{16} + (-3) \times \frac{1}{12} + (-2) \times \frac{1}{24} + (-1) \times \frac{19}{108} + 0 \times \frac{217}{1296} + 1 \times \frac{1}{18} \\ & + 2 \times \frac{14}{81} + 3 \times \frac{1}{9} + 4 \times \frac{1}{54} + 5 \times \frac{2}{27} + 6 \times \frac{2}{81} + 8 \times \frac{1}{81} \\ & = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

【解答】

- (1) ア 2 イ 8 ウ 2 エ 5
オ 3 カ 9
(2) キ 4 ク 4 ケ 4 コ 8
サ 7 シ 4 ス 3
(3) セ 9 ソ 4 タ 3 チ 4

【解説】

(1)

点Oから直線ACに引いた垂線の足をEとする。また、点Oから直線BDに引いた垂線の足をFとする。仮定より $OA = OB = OC = OD = 2$, $OP = 1$, $OE = \frac{3}{5}$ である。また、
 $\angle OEP = \angle OFP = \angle EPF = \angle EOF = 90^\circ$ である。以上のことから、三平方の定理より

$$\begin{aligned} AE &= \frac{\sqrt{91}}{5} \\ EP = OF &= \frac{4}{5} \\ BF &= \frac{2\sqrt{21}}{5} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} AC &= 2AE = \frac{2\sqrt{91}}{5} \\ BD &= 2BF = \frac{4\sqrt{21}}{5} \end{aligned}$$

となるから、四角形ABCDの面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(AP \times BP + BP \times CP + CP \times DP + DP \times AP) &= \frac{1}{2}(AP + CP)(BP + DP) \\ &= \frac{1}{2}AC \times BD \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{91}}{5} \times \frac{4\sqrt{21}}{5} \\ &= \frac{28}{25}\sqrt{39} \end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)と同様の解き方をすると

$$\begin{aligned} AC &= 2\sqrt{4-h^2} \\ BD &= 2\sqrt{3+h^2} \end{aligned}$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} S^2 &= \left(\frac{1}{2}AC \times BD \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{4-h^2} \times 2\sqrt{3+h^2} \right)^2 \\ &= 4(4-h^2)(3+h^2) \\ &= -4h^4 + 4h^2 + 48 \end{aligned}$$

となる。上の式を平方完成すると

$$-4h^4 + 4h^2 + 48 = -4\left(h^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 49 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで直線ACは点Pを通ることを考えると、

$$0 \leq h \leq OP = 1$$

である。よって①式の最大値は $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき49、最小値は $h = 0, 1$ のとき

$$-4\left(0^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 49 = 48$$

となる。ここで、①式は S^2 を表すが、 $S > 0$ であるので S^2 が最大値もしくは最小値をとるとき、 S も最大値もしくは最小値を取る。よって S の最大値は $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $\sqrt{49} = 7$ 、最小値は $h = 0, 1$ のとき $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ となる。

(3)

$S_1 = \frac{1}{2}AP \cdot BP$, $S_2 = \frac{1}{2}CP \cdot DP$ であるから

$$S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{4}AP \cdot BP \cdot CP \cdot DP \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで方べきの定理より

$$AP \cdot CP = BP \cdot DP$$

となる。これを②式に代入すると

$$\begin{aligned} S_1 \cdot S_2 &= \frac{1}{4}AP \cdot BP \cdot CP \cdot DP \\ &= \frac{1}{4}(AP \cdot CP)^2 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。ここで三平方の定理から

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{4-h^2} \\ EP &= \sqrt{1-h^2} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} AP &= AE + EP = \sqrt{4-h^2} + \sqrt{1-h^2} \\ CP &= CE - EP = AE - EP = \sqrt{4-h^2} - \sqrt{1-h^2} \end{aligned}$$

となる。これを③式に代入すると

$$\begin{aligned} S_1 \cdot S_2 &= \frac{1}{4}(AP \cdot CP)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\sqrt{4-h^2} + \sqrt{1-h^2} \right) \left(\sqrt{4-h^2} - \sqrt{1-h^2} \right) \right\}^2 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

となる。