

〔解答〕

(1)

ア 1 イ 3

(2)

ウ 2 エ 1 オ 4 カ 0 キ 4

〔解説〕

(1)

$n=9$ より、一の位の種類は9通りであり、十の位の種類は一の位の数をものぞいた8通りある。よって、全事象の場合の数は $9 \times 8 = 72$ 通りあり、これらの生起確率は同様に確からしい。そのうち3の倍数が何通りあるかを考える。各位の和が3の倍数になればよいので、次の2つの場合がある。

[1] $\{1, 4, 7\}$ のいずれかと $\{2, 5, 8\}$ のいずれかを引くとき

それぞれ何を引くかで3通りずつ、どちらを一の位にするかで2通りあるから、

$$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18 \text{ (通り)}$$

である。

[2] 各位が $\{3, 6, 9\}$ のいずれかのとき

全事象のときと同様に考え、

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ (通り)}$$

である。

以上、[1]、[2]より、全部で $18 + 6 = 24$ 通りあるから、求める確率は

$$\frac{24}{72} = \frac{1}{3}$$

である。

(2)

対称性より、1回目の数が2回目の数以下になる確率も $P(n)$ となる。

ここで1回目の数が2回目の数と同じになる確率を $A(n)$ とすると

$$2P(n) + A(n) = 1$$

が成り立つ。

ここで、 $A(n)$ について(1)と同様に考えれば、1回目と2回目が同じになる事象は $n(n-1)$ 通りあるから、

$$A(n) = \frac{n(n-1)}{n(n-1) \times n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$$

である。

よって、

$$P(n) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n(n-1)} + 1 \right\}$$

となる。

$n=5$ を代入すると、 $P(5) = \frac{21}{40}$ となる。

また $P(n) \geq \frac{13}{7}$ となるとき

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n(n-1)} + 1 \right\} \geq \frac{7}{13} \Leftrightarrow n(n-1) \leq 13$$

であるので、これを満たす最大の n は4である。

〔解答〕

(1)

ク	7	ケ	6	コ	7	サ	6	シ	1	ス	2	セ	1	ソ	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

(2)

タ	5	チ	6	ツ	5	テ	6	ト	1	ナ	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

(3)

ニ	7	ヌ	1	ネ	8
---	---	---	---	---	---

〔解説〕

(1)

直線 $y \cos \theta - x \sin \theta = 0$ 、つまり直線 PQ 上に R があるとき、 R は線分 PQ を $1:2$ に内分する、もしくは外分する点である。

よって R の座標は

$$\frac{2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{1+2} = \left(\frac{7}{6} \cos \theta, \frac{7}{6} \sin \theta \right)$$

$$\frac{-2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{1-2} = \left(\frac{1}{2} \cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta \right)$$

である。

(2)

(1)で求めた2点を結んだ線分が直径となるような円が R の軌跡である。

よって、中心は $\frac{1}{2} \left(\frac{7}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6}$ より、 $\left(\frac{5}{6} \cos \theta, \frac{5}{6} \sin \theta \right)$ である。

半径は $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ である。

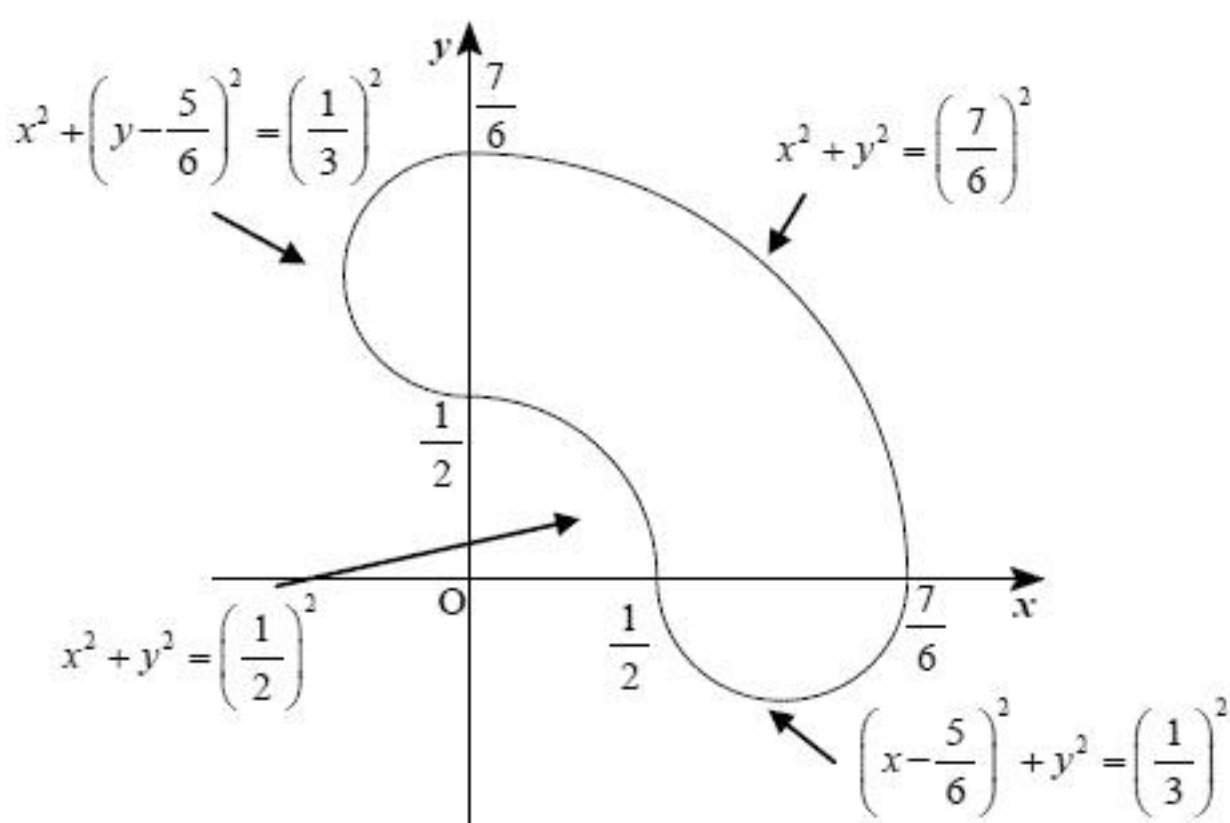
よって、 R の軌跡の方程式は

$$\left(x - \frac{5}{6} \cos \theta \right)^2 + \left(y - \frac{5}{6} \sin \theta \right)^2 = \frac{1}{9}$$

となる。

(3)

θ を $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で動かすとき、 $D(\theta)$ が通過する部分は以下ようになる。



よって、求める面積は

$$\left(\frac{1}{3} \right)^2 \pi + \frac{1}{4} \left(\left(\frac{7}{6} \right)^2 \pi - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \pi \right) = \frac{7}{18} \pi$$

となる。

〔解答〕

(1)

$$\boxed{\text{ノ}} = 3 \quad \boxed{\text{ハ}} = 3 \quad \boxed{\text{ヒ}} = 2 \quad \boxed{\text{フ}} = 7 \quad \boxed{\text{ヘ}} = 4$$

(2)

$$\boxed{\text{ホ}} = 2 \quad \boxed{\text{マ}} = 4 \quad \boxed{\text{ミ}} = 1 \quad \boxed{\text{ム}} = 6 \quad \boxed{\text{メ}} = 3$$

(3)

$$\boxed{\text{モ}} = 1 \quad \boxed{\text{ヤ}} = 5 \quad \boxed{\text{ユ}} = 5 \quad \boxed{\text{ヨ}} = 2$$

〔解説〕

解と係数の関係より、

$$u+v+w=6 \quad \dots\dots ①$$

$$uv+vw+wu=a \quad \dots\dots ②$$

$$uvw=-a \quad \dots\dots ③$$

である。また、

$$(u-1)^3+(v-2)^3+(w-3)^3=0 \quad \dots\dots ④$$

が成り立つ。

因数分解公式

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

に、 $\alpha=u-1$ 、 $\beta=v-2$ 、 $\gamma=w-3$ を代入すると、①より

$$\alpha+\beta+\gamma=u+v+w-6=0$$

であることと、④に注意して、

$$(u-1)(v-2)(w-3)=0$$

となることがわかる。

(1)

$w=3$ のとき、①、③より

$$u+v=3, \quad uv=-\frac{a}{3}$$

であるから、②に代入して

$$uv+vw+wu=w(u+v)+uv=9-\frac{a}{3}=a \quad \therefore a=\frac{27}{4}$$

である。

(2)

$v=2$ のとき、(1)と同様にして、

$$u+w=4, \quad a=\frac{16}{3}$$

と求まる。

(3)

$u=1$ のとき、(1)と同様にして、

$$v+w=5, \quad a=\frac{5}{2}$$

となる。

【解答】

(1)

ラ	4	リ	1	ル	5	レ	1	ロ	1	ワ	5	ヲ	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

(2)

シ	1	あ	1	い	1	う	2	え	5	お	1	か	2
き	1	く	6										

(3)

け	4	こ	2	さ	2								
---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--

(4)

し	1	す	2										
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(5)

せ	1	そ	1	た	4	ち	3	つ	9	て	0	と	4
な	3												

【解説】

以下、原点Oを始点とする位置ベクトルの成分表示と、点の座標とを同一視する。

(1)

点 P_m の座標は

$$\begin{aligned}(1-m)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB} &= (1-m)(2, 0, 0)+m(0, 2, 0) \\ &= (2-2m, 2m, 0)\end{aligned}$$

であるから、点 Q_m の座標は

$$\frac{m}{m+1}\overrightarrow{OP_m}=\left(\frac{2m(1-m)}{m+1}, \frac{2m^2}{m+1}, 0\right)$$

と表せる。よって、 $m=\frac{1}{5}$ を代入し、 $Q_{\frac{1}{5}}$ の座標は

$$\left(\frac{2\cdot\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{5}+1}, \frac{2\left(\frac{1}{5}\right)^2}{\frac{1}{5}+1}, 0\right)=\left(\frac{4}{15}, \frac{1}{15}, 0\right)$$

となる。

(2)

点 R_m 、点 M の座標はそれぞれ

$$\overrightarrow{OR_m}=\frac{m}{m+1}\overrightarrow{OC}=\left(\frac{m}{m+1}, \frac{m}{m+1}, \frac{2m}{m+1}\right)$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$$

であるから、点 S_m の座標は

$$\begin{aligned}(1-m)\overrightarrow{OR_m}+m\overrightarrow{OM} &= (1-m)\left(\frac{m}{m+1}, \frac{m}{m+1}, \frac{2m}{m+1}\right)+m\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \\ &= \left(\frac{m(5+m)}{2(m+1)}, \frac{m(3-m)}{2(m+1)}, \frac{m(1-3m)}{m+1}\right)\end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $m=\frac{1}{2}$ を代入し、 $S_{\frac{1}{2}}$ の座標は

$$\left(\frac{\frac{1}{2}\left(5+\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}+1\right)}, \frac{\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}+1\right)}, \frac{\frac{1}{2}\left(1-3\cdot\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}+1}\right)=\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, -\frac{1}{6}\right)$$

となる。

(3)

(1)で求めた Q_m を用いて

$$\overrightarrow{CQ_m}=\left(\frac{2m(1-m)}{m+1}-1, \frac{2m^2}{m+1}-1, -2\right)=\left(\frac{-2m^2+m-1}{m+1}, \frac{2m^2-m-1}{m+1}, -2\right)$$

であるから、

$$\overrightarrow{CQ_m}\cdot\overrightarrow{OA}=\left(\frac{-2m^2+m-1}{m+1}, \frac{2m^2-m-1}{m+1}, -2\right)\cdot(2, 0, 0)=\frac{1}{m+1}(-4m^2+2m-2)$$

である。

(4)

(3)で求めた $\overrightarrow{CQ_m}$ を用いて

$$\overrightarrow{CQ_m}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{-2m^2+m-1}{m+1}, \frac{2m^2-m-1}{m+1}, -2\right)\cdot(-2, 2, 0)=\frac{4m(2m-1)}{m+1}$$

であり、 $0<m<1$ であることから $m=\frac{1}{2}$ のときに $\overrightarrow{CQ_m}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 、つまり $\overrightarrow{CQ_m}$ と $\overrightarrow{AB}$ が垂直

となる。

(5)

 $\overrightarrow{Q_mS_m}$ を求めると

$$\overrightarrow{Q_mS_m}=\left(\frac{m(1+5m)}{2(m+1)}, \frac{m(3-5m)}{2(m+1)}, \frac{m(1-3m)}{m+1}\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{m+1}{m}\times Q_mS_m &= \frac{m+1}{m}|\overrightarrow{Q_mS_m}| \\ &= \frac{m+1}{m}\sqrt{\left(\frac{m(1+5m)}{2(m+1)}\right)^2+\left(\frac{m(3-5m)}{2(m+1)}\right)^2+\left(\frac{m(1-3m)}{m+1}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1+5m}{2}\right)^2+\left(\frac{3-5m}{2}\right)^2+(1-3m)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{43m^2-22m+7} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{43\left(m-\frac{11}{43}\right)^2+\frac{180}{43}}\end{aligned}$$

となり、これは $m=\frac{11}{43}$ のときに、最小値

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{180}{43}}=\sqrt{\frac{90}{43}}$$

をとる。