

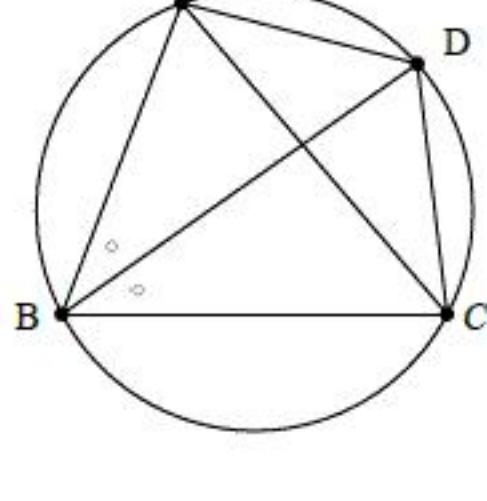
1

【解答】

- (1) ア 3 イ 5 ウ 5 エ 2 オ 2
カ 1 キ 0 ク 5
(2) ケ 1 コ 9 サ 9 シ 1 ス 6
セ 3 ソ 6 タ 1 チ 1 ツ 1
テ 3 ト 5 ナ 5
(3) ニ 2 ヌ 2 ネ 1 ノ 2 ハ 2
ヒ 4 フ 1 ヘ 3 ホ 1 マ 3
ミ 2 ム 4 メ 9 モ 2 ヤ 7
ユ 1 ヨ 5 ラ 1 リ 9

【解説】

(1)



余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} \\ &= \frac{5^2 + 7^2 - (4\sqrt{2})^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

である。ここで、 $0 < B < \pi$ より $\sin B > 0$ であるから、

$$\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

となる。よって正弦定理より、

$$\begin{aligned}R &= \frac{AC}{2\sin B} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{4}{5}} \\ &= \frac{5}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

である。

円周角の定理より $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle CBD = \angle CAD$ であり、 $\angle ABD = \angle CBD$ より、 $\angle ACD = \angle CAD$ となる。したがって、 $\triangle ACD$ は $AD = CD$ の二等辺三角形である。また、四角形 $ABCD$ は円に内接しているから、

$$\cos \angle ADC = \cos(\pi - B) = -\cos B = -\frac{3}{5}$$

である。 $AD = x$ において $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると、

$$\begin{aligned}AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC \\ \Leftrightarrow (4\sqrt{2})^2 &= x^2 + x^2 - 2x^2 \left(-\frac{3}{5}\right) \\ \Leftrightarrow x^2 &= 10 \\ \therefore x = AD &= \sqrt{10} \quad (\because x > 0)\end{aligned}$$

となる。 $\triangle AOD = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \angle AOD$ であるが、ここで中心角と円周角の関係より

$$\angle AOD = 2\angle ABD = \angle ABC$$

であるから、 $\sin \angle AOD = \frac{4}{5}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\triangle AOD &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} \\ &= 5\end{aligned}$$

である。

(2)

(a)

12 個の玉から 4 個の玉を同時に取り出す場合の数は、

$${}_{12}C_4 = 495 \text{ (通り)}$$

である。また、取り出した玉がすべて青色である場合の数は、

$${}_5C_4 = 5 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める確率は、

$$\frac{5}{495} = \frac{1}{99}$$

となる。

(b)

取り出した玉すべてが赤玉であることはない。取り出した玉すべてが青玉である確率は(a)より $\frac{1}{99}$ である。取り出した玉すべてが白玉である確率は

$$\frac{{}_4C_4}{495} = \frac{1}{495}$$

である。したがって、取り出した玉の色が 1 種類である確率は

$$\frac{1}{99} + \frac{1}{495} = \frac{2}{165}$$

であるから、求める確率は、

$$1 - \frac{2}{165} = \frac{163}{165}$$

である。

(c)

取り出した玉の色が 3 種類であるのは次の 3 通りの場合が考えられる。

[1] 赤玉 2 個、白玉 1 個、青玉 1 個を取り出すとき

取り出す赤玉の選び方は ${}_3C_2$ (通り)、白玉の選び方は ${}_4C_1$ (通り)、青玉の選び方は ${}_5C_1$ (通り) であるから、この場合の確率は

$$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_5C_1}{495} = \frac{4}{33}$$

である。

[2] 赤玉 1 個、白玉 2 個、青玉 1 個を取り出すとき

この場合の確率は[1]と同様に考えて、

$$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_5C_1}{495} = \frac{2}{11}$$

である。

[3] 赤玉 1 個、白玉 1 個、青玉 2 個を取り出すとき

この場合の確率も[1]と同様に考えて、

$$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_5C_2}{495} = \frac{8}{33}$$

である。

以上[1], [2], [3]より求める確率は、

$$\frac{4}{33} + \frac{2}{11} + \frac{8}{33} = \frac{6}{11}$$

となる。

(d)

取り出した玉に赤玉が 2 個含まれている確率は、

$$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_9C_2}{495} = \frac{12}{55}$$

であり、また、取り出した玉に赤玉が 3 個含まれている確率は、

$$\frac{{}_3C_3 \cdot {}_9C_1}{495} = \frac{1}{55}$$

である。したがって、求める確率は

$$\frac{12}{55} + \frac{1}{55} = \frac{13}{55}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned}g_0(x) &= f_0'(x) \\ &= 2xe^{x^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_1(x) &= f_1'(x) \\ &= e^{x^2} + x \cdot 2xe^{x^2} \\ &= (2x^2 + 1)e^{x^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_2(x) &= f_2'(x) \\ &= 2xe^{x^2} + x^2 \cdot 2xe^{x^2} \\ &= (2x^3 + 2x)e^{x^2}\end{aligned}$$

である。曲線 $y = h(x)$ と x 軸の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned}h(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 &= 0 \quad (\because e^{x^2} \neq 0) \\ \Leftrightarrow (x-1)(3x-1)(x+4) &= 0 \\ \therefore x &= -4, \frac{1}{3}, 1\end{aligned}$$

となる。また、 $h(x) = ag_2(x) + bg_1(x) - cg_0(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}(3x^3 + 8x^2 - 15x + 4)e^{x^2} &= \{a(2x^3 + 2x) + b(2x^2 + 1) - c(2x)\}e^{x^2} \\ \Leftrightarrow 3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 &= 2ax^3 + 2bx^2 + (2a - 2c)x + b \\ \Leftrightarrow 2a &= 3, 2b = 8, 2a - 2c = -15, b = 4 \\ \therefore a &= \frac{3}{2}, b = 4, c = 9\end{aligned}$$

となる。曲線 $y = h(x)$ と x 軸で囲まれた図形のうち x 軸の下にある部分は $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ の部分

であるから、

$$\begin{aligned}S &= -\int_{\frac{1}{3}}^1 h(x) dx \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^1 \left\{ -\frac{3}{2}g_2(x) - 4g_1(x) + 9g_0(x) \right\} dx \\ &= \left[-\frac{3}{2}x^2e^{x^2} - 4xe^{x^2} + 9e^{x^2} \right]_{\frac{1}{3}}^1 \\ &= \frac{7}{2}e - \left(-\frac{1}{6}e^{\frac{1}{9}} - \frac{4}{3}e^{\frac{1}{9}} + 9e^{\frac{1}{9}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(7e - 15e^{\frac{1}{9}} \right)\end{aligned}$$

となる。

2

(1)

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 2r-1 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} \\ &= rP \end{aligned}$$

より、 $\alpha=r$ である。また、

$$\begin{aligned} AQ &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 2r-1 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1-r \end{pmatrix} \\ &= (1-r)Q \end{aligned}$$

より、 $\beta=1-r$ である。

(答) $\alpha=r, \beta=1-r$

(2)

$$\begin{aligned} A^n P &= A^{n-1} \cdot AP \\ &= A^{n-1} \cdot rP \\ &= \dots \\ &= r^n P \\ &= r^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり、同様にして、

$$\begin{aligned} A^n Q &= (1-r)^n Q \\ &= (1-r)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

(答) $A^n P = r^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A^n Q = (1-r)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3)

$$\begin{aligned} Q_n &= AQ_{n-1} + P \\ &= A(AQ_{n-2} + P) + P \\ &= A^2 Q_{n-2} + rP + P \\ &= \dots \\ &= A^{n-1} Q_1 + (r^{n-2} + r^{n-3} + \dots + 1)P \\ &= (1-r)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1-r^{n-1}}{1-r} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\because 0 < r < 1) \end{aligned}$$

$$\therefore Q_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-r^{n-1}}{1-r} \\ (1-r)^{n-1} + \frac{1-r^{n-1}}{1-r} \end{pmatrix}$$

である。

(答) $Q_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-r^{n-1}}{1-r} \\ (1-r)^{n-1} + \frac{1-r^{n-1}}{1-r} \end{pmatrix}$

(4)

(a)

台形 $X_n X_{n+1} Y_{n+1} Y_n$ は高さ $a_{n+1} - a_n$ 、上底 $b_{n+1} - a_{n+1}$ 、下底 $b_n - a_n$ の台形である。

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{1-r} \{ (1-r^n) - (1-r^{n-1}) \} \\ &= r^{n-1}, \\ b_n - a_n &= (1-r)^{n-1} + \frac{1-r^{n-1}}{1-r} - \frac{1-r^{n-1}}{1-r} \\ &= (1-r)^{n-1} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \{ (b_n - a_n) + (b_{n+1} - a_{n+1}) \} (a_{n+1} - a_n) \\ &= \frac{1}{2} \{ (1-r)^{n-1} + (1-r)^n \} r^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} (2-r) (1-r)^{n-1} \cdot r^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} (2-r) (r-r^2)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < r < 1$ より $0 < r-r^2 < 1$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (2-r) (r-r^2)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} (2-r) \cdot \frac{1}{1-(r-r^2)} \\ &= \frac{2-r}{2(r^2-r+1)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2-r}{2(r^2-r+1)}$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dr} &= \frac{-2(r^2-r+1) - (2-r) \cdot 2(2r-1)}{4(r^2-r+1)^2} \\ &= \frac{r^2-4r+1}{2(r^2-r+1)^2} \\ &= \frac{(r-2+\sqrt{3})(r-2-\sqrt{3})}{2(r^2-r+1)^2} \end{aligned}$$

であるから増減表は次のようになる。

r	0	...	$2-\sqrt{3}$	...	1
$\frac{dS}{dr}$		+	0	-	
S		↗	$\frac{2\sqrt{3}+3}{6}$	↘	

よって、 $r=2-\sqrt{3}$ のときに S は最大値 $\frac{2\sqrt{3}+3}{6}$ をとる。

(答) $r=2-\sqrt{3}$ のとき、最大値 $\frac{2\sqrt{3}+3}{6}$

3

(1)

$$p=1+2\cos\theta\geq 2 \text{ より,}$$

$$\cos\theta\geq \frac{1}{2}$$

である。したがって、 $-\pi<\theta\leq\pi$ より、

$$-\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}$$

である。このとき $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\sin\theta\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq q\leq 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}, \quad 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq q\leq 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)

[1] $a>0$ のとき

直線 PH は、傾き $-\frac{1}{a}$ で点 P を通る直線であるから、その方程式は、

$$y=-\frac{1}{a}(x-1-2\cos\theta)+1+\sin\theta$$

である。これと $y=ax$ を連立して、

$$\begin{aligned} ax &= -\frac{1}{a}(x-1-2\cos\theta)+1+\sin\theta \\ \therefore x &= \frac{1}{a^2+1}(a\sin\theta+2\cos\theta+a+1) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$u=\frac{1}{a^2+1}(a\sin\theta+2\cos\theta+a+1), \quad v=\frac{a}{a^2+1}(a\sin\theta+2\cos\theta+a+1)$$

である。

[2] $a=0$ のとき

H(1+2cosθ, 0) より、これは[1]の場合に含まれることがわかる。

以上[1], [2]より、

$$u=\frac{1}{a^2+1}(a\sin\theta+2\cos\theta+a+1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad u=\frac{1}{a^2+1}(a\sin\theta+2\cos\theta+a+1)$$

(3)

$$u^2=\frac{1}{(a^2+1)^2}(a\sin\theta+2\cos\theta+a+1)^2,$$

$$(2+a^2)v^2=\frac{(2+a^2)a^2}{(a^2+1)^2}(a\sin\theta+2\cos\theta+a+1)^2$$

であるから、

$$\begin{aligned} u^2+(2+a^2)v^2 &= \frac{1}{(a^2+1)^2}(a\sin\theta+2\cos\theta+a+1)^2(a^4+2a^2+1) \\ &= (a\sin\theta+2\cos\theta+a+1)^2 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{u^2+(2+a^2)v^2} \\ &= a\sin\theta+2\cos\theta+a+1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad N=a\sin\theta+2\cos\theta+a+1$$

(4)

(a)

$a=0$ のとき

$$N=2\cos\theta+1$$

である。 $-\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}$ より、 N は $\theta=0$ で最大値3をとる。したがって、 $M(0)=3$ である。

$$(\text{答}) \quad M(0)=3$$

(b)

$$N=\sqrt{a^2+4}\sin(\theta+\alpha)+a+1$$

と変形できる。ただし、 α は

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+4}}, \quad \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{a^2+4}}, \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

を満たす実数である。 $-\frac{\pi}{3}+\alpha\leq\theta+\alpha\leq\frac{\pi}{3}+\alpha$ であることに注意する。

$$[1] \quad \frac{\pi}{3}+\alpha<\frac{\pi}{2} \quad \therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{6} \text{ のとき}$$

$$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{a^2+4}}<\frac{1}{2}$$

であるから、 $a\geq 0$ より、

$$a>2\sqrt{3}$$

である。このとき、 $\theta=\frac{\pi}{3}$ で N は最大となる。よって、

$$\begin{aligned} M(a) &= N|_{\theta=\frac{\pi}{3}} \\ &= a\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{\pi}{3}+a+1 \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{2}a+2 \end{aligned}$$

である。

$$[2] \quad \frac{\pi}{3}+\alpha\geq\frac{\pi}{2} \quad \therefore \frac{\pi}{6}\leq\alpha<\frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$\frac{1}{2}\leq\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{a^2+4}}<1$$

であるから、 $a\geq 0$ より、

$$0<a\leq 2\sqrt{3}$$

である。このとき、 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ で N は最大となる。よって、

$$M(a)=\sqrt{a^2+4}+a+1$$

である。

以上より

$$M(a)=\begin{cases} \frac{2+\sqrt{3}}{2}a+2 & (a>2\sqrt{3} \text{ のとき}) \\ \sqrt{a^2+4}+a+1 & (0<a\leq 2\sqrt{3} \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad M(a)=\frac{2+\sqrt{3}}{2}a+2(a>2\sqrt{3} \text{ のとき}), \quad \sqrt{a^2+4}+a+1(0<a\leq 2\sqrt{3} \text{ のとき})$$