

1

- (1)
- | |
|---|
| ア | 1 | イ | 3 | ウ | 5 | エ | 7 | オ | 5 | カ | 7 | キ | 2 | ク | 5 | ケ | 2 | コ | 3 |
| サ | 5 | シ | 7 | ス | 2 | セ | 5 | ソ | 2 | タ | 6 | チ | 2 | ツ | 5 | テ | 3 | ト | 2 |
- (2)
- | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ナ | 5 | ニ | 3 | ヌ | 1 | ネ | 2 | ノ | 1 | ハ | 2 | ヒ | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
- (3)
- | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| フ | 2 | ヘ | 4 | ホ | 3 | マ | 4 | ミ | 3 | ム | 1 |
| メ | 3 | モ | 2 | ヤ | 1 | ユ | 3 | ヨ | 4 | ラ | 3 |

【解説】

(1)

$$b_n = \frac{1}{5}a_n + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} = 3b_n + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①より

$$b_1 = \frac{1}{5}a_1 + 1 = 1$$

である。

①②から

$$b_{n+1} = \frac{1}{5}a_{n+1} + 1 = \frac{1}{5}(3b_n + 2) = \frac{3}{5}b_n + \frac{7}{5}$$

を得る。

この式は

$$\left(b_{n+1} - \frac{7}{2}\right) = \frac{3}{5}\left(b_n - \frac{7}{2}\right)$$

と変形できるので

$$b_n = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

と求まる。

また

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{7}{2}$$

である。

また

$$\frac{b_{2n} - b_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{2n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}{-\frac{2}{5}}$$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n} - b_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{5}{2}$$

となる。

①より

$$a_n = 5b_n - 5 = \frac{25}{2}\left\{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

とわかる。

よって $c_n = a_{2n} - a_n$ とすると

$$c_n = \frac{25}{2}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^{2n-1}\right\} = \frac{25}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{15}{2}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}$$

となる。

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{625}{32}$$

となる。

(2)

z の実部と虚部がともに 0 以上となる範囲で θ を動かすので、 θ の変域は

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

である。

ここで

$$w = (4\cos\theta + 3\sin\theta) + (9\cos\theta + 4\sin\theta)i$$

となるので

w の実部は

$$4\cos\theta + 3\sin\theta = 5\sin(\theta + \alpha) \quad (\alpha \text{ は } \sin\alpha = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3}{5} \text{ をみたす})$$

である。

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3}{5} \text{ より } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ とわかるので}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ のときに最大値 } 5$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のときに最小値 } 3$$

をとる。

また

$$\begin{aligned} w\overline{w} &= 97\cos^2\theta + 25\sin^2\theta + 96\sin\theta\cos\theta \\ &= 25 + 72\cos^2\theta + 96\sin\theta\cos\theta \\ &= 25 + 36(\cos 2\theta + 1) + 48\sin 2\theta \\ &= 36\cos 2\theta + 48\sin 2\theta + 61 \\ &= 60\sin(2\theta + \beta) + 61 \end{aligned}$$

$$(\beta \text{ は } \sin\beta = \frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{4}{5} \text{ をみたす})$$

と表せる。

$$\sin\beta = \frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{4}{5} \text{ より } 0 < \beta < \frac{\pi}{4} \text{ であり, また } 0 \leq 2\theta \leq \pi \text{ であるので}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} - \beta \text{ のときに最大値 } 121$$

$$2\theta = \pi \text{ のときに最小値 } 25$$

をとる。

(3)

$$\int_1^e \frac{f(t)}{t} dt \text{ は定数であるので } \int_1^e \frac{f(t)}{t} dt = k \text{ とおく。すると}$$

$$f'(x) = 2\log x + \frac{k}{7-2e}$$

となるので、 $f(1) = 0$ を考慮して

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(1) \\ &= \int_1^x f'(t) dt \\ &= \int_1^x \left(2\log t + \frac{k}{7-2e}\right) dt \\ &= \left[2(t\log t - t) + \frac{k}{7-2e}t\right]_1^x \\ &= 2x\log x - 2x + \frac{kx}{7-2e} + 2 - \frac{k}{7-2e} \end{aligned}$$

$$\text{と求まる。ここで } 2 - \frac{k}{7-2e} = \alpha \text{ とおくと、このとき}$$

$$\begin{aligned} k &= \int_1^e \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \int_1^e \left(2\log t - \alpha + \frac{\alpha}{t}\right) dt \\ &= [2t\log t - 2t - \alpha t + \alpha \log t]_1^e \\ &= (2-e)\alpha + 2 \end{aligned}$$

より

$$k = (2-e)\left(2 - \frac{k}{7-2e}\right) + 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}(7-2e)$$

となるので

$$f(x) = 2x\log x - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

となる。また、

$$f'(x) = 2\log x + \frac{2}{3}$$

であるので増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$		$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\text{よって } f(x) \text{ は } x = e^{-\frac{1}{3}} \text{ のときに最小値 } -2e^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3} \text{ をとる。}$$

(1)

一次変換 f を表す行列を A とおくと、 A は

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \end{pmatrix}$$

を満たすので、これらを合わせた

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 21 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ の行列式は

$$1 \cdot (-7) - 1 \cdot 1 = -8 \neq 0$$

なので、この行列には逆行列が存在し、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である。これを①の両辺に右から掛けることにより、

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 32 & 8 \\ 56 & -16 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

$P(x, y)$, $Q(X, Y)$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+y \\ 7x-2y \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ 7x-3y \end{pmatrix}$$

となる。よって、条件(*)は、

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} \\ &= x(3x+y) + y(7x-3y) \\ &= 3x^2 + 8xy - 3y^2 \\ &= (3x-y)(x+3y) \end{aligned}$$

となるので、点 $P(x, y)$ は

$$3x-y=0 \quad \text{または} \quad x+3y=0$$

を満たし、これらが求める 2 直線の方程式である。

$$\text{(答)} \quad 3x-y=0, \quad x+3y=0$$

(3)

直線 $3x-y=0$ と点 $(a, 0)$ の距離 d_1 は、点と直線の距離の公式より

$$d_1 = \frac{|3a-0|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{3a}{\sqrt{10}} \quad (\because a \geq 0)$$

である。同様にして、直線 $x+3y=0$ と点 $(a, 0)$ の距離 d_2 は、

$$d_2 = \frac{|a+3 \cdot 0|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{a}{\sqrt{10}} \quad (\because a \geq 0)$$

である。よって、

$$d_1 \geq d_2 \quad (\text{等号は } a=0 \text{ のときのみ})$$

であるから、 $(a, 0)$ を中心とする半径 1 の円が $3x-y=0$ と共有点を持つとき、常にその円は $x+3y=0$ と 2 点で交わる。したがって、条件(**)を満たすのは、円が $3x-y=0$ とは共有点を持たず、かつ $x+3y=0$ と 2 点で交わる時、すなわち、

$$d_1 > 1 > d_2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{3} < a < \sqrt{10}$$

のときである。

$$\text{(答)} \quad \frac{\sqrt{10}}{3} < a < \sqrt{10}$$

(4)

(3)からわかるように、 P_i はいずれも直線 $x+3y=0$ 上の点であるから、

$$x_i = -3y_i$$

が成り立つ。また、 Q_i の座標を (X_i, Y_i) とおくと、

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_i + y_i \\ 7x_i - 2y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11y_i \\ -23y_i \end{pmatrix}$$

であるから、 $\triangle OP_i Q_i$ の面積 S_i は

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{2} |x_i Y_i - y_i X_i| \\ &= \frac{1}{2} |(-3y_i) \cdot (-23y_i) - y_i \cdot (-11y_i)| \\ &= \frac{1}{2} |-80y_i^2| \\ &= 40y_i^2 \end{aligned}$$

と表すことができる。

ここで、直線 $x+3y=0$ と円 $(x-a)^2 + y^2 = 1$ の交点の y 座標 y_1, y_2 は、2 式から x を消去して得られる方程式

$$\{(-3y)-a\}^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 10y^2 + 6ay + a^2 - 1 = 0$$

の 2 解であるから、解と係数の関係より

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= -\frac{3a}{5} \\ y_1 y_2 &= \frac{a^2 - 1}{10} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、面積の和 $S_1 + S_2$ は

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= 40(y_1^2 + y_2^2) \\ &= 40\{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2\} \\ &= 40\left\{\left(-\frac{3a}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a^2 - 1}{10}\right\} \\ &= \frac{32}{5} a^2 + 8 \end{aligned}$$

と表せる。

$$\text{(答)} \quad S_i = 40y_i^2, \quad S_1 + S_2 = \frac{32}{5} a^2 + 8$$

(1)

点Pの x 座標を $t > 0$ とすれば、点Pの座標は $P(t, e^k)$ とかける。 $y = e^k$ より $y' = ke^k$ であるから、

直線 ℓ_1 の方程式は、

$$y - e^k = ke^k(x - t)$$

のように表せる。これが原点を通るから、

$$0 - e^k = ke^k(0 - t)$$

$$\therefore t = \frac{1}{k} \quad (\because k > 0)$$

が成り立つ。よって、点Pの座標は

$$P\left(\frac{1}{k}, e\right)$$

となる。

よって、直線 ℓ_1 の傾きは ke とわかるから、これと直交して点Pを通る直線 ℓ_2 の方程式は

$$y = -\frac{1}{ke}\left(x - \frac{1}{k}\right) + e$$

となる。これと x 軸との交点の x 座標は

$$0 = -\frac{1}{ke}\left(x - \frac{1}{k}\right) + e$$

$$\therefore x = \frac{1}{k} + ke^2$$

と求まるので、交点の座標は

$$\left(\frac{1}{k} + ke^2, 0\right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{1}{k}, e\right), \text{ 交点 } \left(\frac{1}{k} + ke^2, 0\right)$$

(2)

図形Aを x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V は、0から $\frac{1}{k}$ までの部分の回転体

と、 $\frac{1}{k}$ から $\frac{1}{k} + ke^2$ までの部分の円錐の体積の和だから、

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{k}} (e^{kx})^2 dx + \frac{1}{3} \cdot ke^2 \cdot \pi e^2$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2k} e^{2kx} \right]_0^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{3} \pi e^4 k$$

$$= \pi \left(\frac{e^4 k}{3} + \frac{e^2 - 1}{2k} \right)$$

$$(\text{答}) \quad \pi \left(\frac{e^4 k}{3} + \frac{e^2 - 1}{2k} \right)$$

(3)

$$V = \pi \left(\frac{e^4 k}{3} + \frac{e^2 - 1}{2k} \right)$$

について、 $k > 0$ 、 $e^2 - 1 > 0$ より相加・相乗平均の関係を用いることができて、

$$V \geq 2\pi \sqrt{\frac{e^4 k}{3} \cdot \frac{e^2 - 1}{2k}} = \frac{1}{3} \pi e^2 \sqrt{6(e^2 - 1)}$$

が成り立つ。等号成立は、

$$\frac{e^4 k}{3} = \frac{e^2 - 1}{2k} \Leftrightarrow k^2 = \frac{3(e^2 - 1)}{2e^4}$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{6(e^2 - 1)}}{2e^2}$$

のときである。

よって、 V は、

$$k = \frac{\sqrt{6(e^2 - 1)}}{2e^2} \text{ のとき最小値 } \frac{1}{3} \pi e^2 \sqrt{6(e^2 - 1)}$$

をとる。

$$(\text{答}) \text{ 最小値 } \frac{1}{3} \pi e^2 \sqrt{6(e^2 - 1)} \quad (k = \frac{\sqrt{6(e^2 - 1)}}{2e^2} \text{ のとき})$$