

1

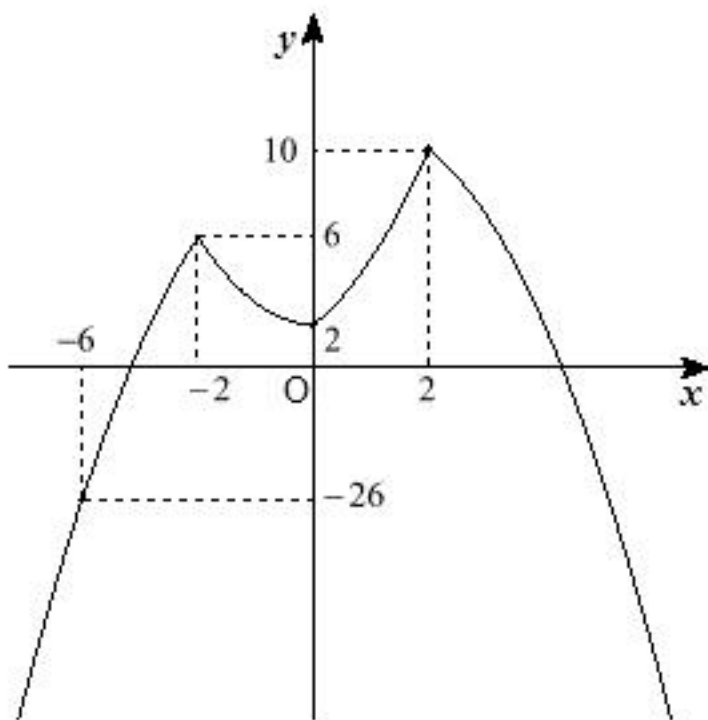
(1)	ア	2	イ	6	ウ	1	エ	0	オ	1
	カ	0	キ	3	ク	2				
(2)	ケ	2	コ	2	サ	7	シ	2	ス	1
	セ	9	ソ	8	タ	3	チ	1	ツ	8
(3)	テ	4	ト	3	ナ	1	ニ	2	ヌ	6
	ネ	4	ノ	7	ハ	2	ヒ	3		

【解説】

(1) $f(x)=|x|-\left|x^2-4\right|+|x+6|$ とおき、 x の範囲に気をつけて右辺の絶対値をはずすと、

$$\begin{aligned}-x-\left(x^2-4\right)-\left(x+6\right) &=-x^2-2 x-2 & (x<-6) \\ -x-\left(x^2-4\right)+\left(x+6\right) &=-x^2+10 & (-6 \leq x<-2) \\ -x+\left(x^2-4\right)+\left(x+6\right) &=x^2+2 & (-2 \leq x<2) \\ x+\left(x^2-4\right)+\left(x+6\right) &=x^2+2 x+2 & (0 \leq x<2) \\ x-\left(x^2-4\right)+\left(x+6\right) &=-x^2+2 x+10 & (2 \leq x)\end{aligned}$$

となる。また、 $y=f(x)$ をグラフにすると、次のようになる。



よって、前図より、 $f(x)=a$ の実数解が2個であるための条件は、
 $a<2, 6<a<10$

となる。また、実数解をもたないための条件は、
 $a>10$

である。また、不等式

$$|x|-\left|x^2-4\right|+|x+6|>2$$

を満たす整数解の個数は $y>2$ をみたす $y=f(x)$ 上の格子点の個数と一致する。そのような格子点は $(-2, 6), (-1, 3), (1, 5), (2, 10), (3, 7)$ の5個なので、正の整数解は $x=1, 2, 3$ の3個あり、負の整数解は $x=-2, -1$ の2個ある。

(2)

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= (\vec{b}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{a}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{c}-\vec{b} \cdot \vec{a}-\vec{a} \cdot \vec{c}+\left|\vec{a}\right|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

となるので、 $\overline{AB}$ と $\overline{AC}$ のなす角は $\frac{\pi}{2}$ である。ここで、

$$\begin{aligned}|\overline{AB}| &= \sqrt{\left|\vec{b}\right|^2-2 \vec{b} \cdot \vec{a}+\left|\vec{a}\right|^2}=9 \\ |\overline{AC}| &= \sqrt{\left|\vec{c}\right|^2-2 \vec{c} \cdot \vec{a}+\left|\vec{a}\right|^2}=3\end{aligned}$$

であり、 $\triangle ABC$ の面積は、 $\angle BAC=90^{\circ}$ なので、

$$\frac{1}{2} \cdot|\overline{AB}| \cdot|\overline{AC}|=\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3=\frac{27}{2}$$

となる。続いて、ベクトル $\overline{OA}+s \overline{AB}+t \overline{AC}$ が、3点A,B,Cを通る平面と直交するとき、ベクトル $\overline{OA}+s \overline{AB}+t \overline{AC}$ と $\overline{AB}$ は直交するので、

$$\begin{aligned}(\overline{OA}+s \overline{AB}+t \overline{AC}) \cdot \overline{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{AB}+s|\overline{AB}|^2+t \overline{AC} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}-\left|\vec{a}\right|^2+81 s &= 0 \\ \Leftrightarrow-9+81 s &= 0 \\ \therefore s &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

となる。同様に、ベクトル $\overline{OA}+s \overline{AB}+t \overline{AC}$ は $\overline{AC}$ とも直交するので、

$$\begin{aligned}(\overline{OA}+s \overline{AB}+t \overline{AC}) \cdot \overline{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{AC}+s \overline{AB} \cdot \overline{AC}+t|\overline{AC}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c}-\left|\vec{a}\right|^2+9 t &= 0 \\ \Leftrightarrow-24+9 t &= 0 \\ \therefore t &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

となる。四面体OABCの体積について、 $\triangle ABC$ を底面とみなすとベクトル

$\overline{OA}+\frac{1}{9} \overline{AB}+\frac{8}{3} \overline{AC}$ がその高さとなる。ここで、

$$\begin{aligned}\left|\overline{OA}+\frac{1}{9} \overline{AB}+\frac{8}{3} \overline{AC}\right|^2 &=|\overline{OA}|^2+\frac{1}{81}|\overline{AB}|^2+\frac{64}{9}|\overline{AC}|^2+\frac{2}{9} \overline{OA} \cdot \overline{AB}+\frac{16}{3} \overline{OA} \cdot \overline{AC} \\ &= 81+1+64-2-128 \\ &= 16\end{aligned}$$

となるので、四面体OABCの体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{27}{2} \cdot 4=18$$

となる。

(3)

3倍角の公式より、

$$4 \cos ^3 \theta-3 \cos \theta-\cos 3 \theta=0$$

である。 t に関する3次方程式に $t=\cos \theta$ を代入すると、

$$\begin{aligned}4 \cos ^3 \theta-3 \cos \theta-\frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos 3 \theta &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

である。これを満たす θ の値は、 $\theta=\frac{1}{12} \pi, \frac{7}{12} \pi, \frac{3}{4} \pi$ である。ここで、

$$\begin{aligned}\cos \frac{1}{12} \pi &= \cos \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4}+\sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

となる。同様にして、

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{12} \pi &= \sin \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4}-\cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\tan \frac{1}{12} \pi &= \frac{\sin \frac{1}{12} \pi}{\cos \frac{1}{12} \pi} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ &= 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

である。

(1)

まず、直線 ℓ の方程式は、接線の公式より、

$$\begin{aligned}y - at^2 &= 2at(x - t) \\ \therefore y &= 2atx - at^2\end{aligned}$$

となる。求める直線は点 P を通り、 $t > 0$ より傾き $-\frac{1}{2at}$ の直線なので、

$$y = -\frac{1}{2at}x + at^2 + \frac{1}{2a}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{1}{2at}x + at^2 + \frac{1}{2a}$$

(2)

直線 $\ell: y = 2atx - at^2$ より、点 R の座標は、 $\left(\frac{t}{2}, 0\right)$ となる。よって、線分 RP の長さは、

$$\sqrt{\frac{t^2}{4} + a^2 t^4} = \frac{t}{2} \sqrt{1 + 4a^2 t^2}$$

となる。よって、 $RP = RQ$ より、点 Q の x 座標は、

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{2} \sqrt{1 + 4a^2 t^2} = \frac{t}{2} (1 + \sqrt{1 + 4a^2 t^2})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{t}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a^2 t^2}), 0\right)$$

(3)

$RP = RQ$ であり、直線 ℓ と点 P において接するので、 x 軸とは点 Q で接する。よって、この円の中心 (q, r) について、まず、

$$q = \frac{t}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a^2 t^2})$$

が成り立つ。また、中心 (q, r) は、(1) で求めた直線 $y = -\frac{1}{2at}x + at^2 + \frac{1}{2a}$ 上にあるので、 r について、

$$\begin{aligned}r &= -\frac{1}{2at}q + at^2 + \frac{1}{2a} \\ &= -\frac{1}{2at} \cdot \frac{t}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a^2 t^2}) + at^2 + \frac{1}{2a} \\ &= at^2 + \frac{1}{4a} \cdot (1 - \sqrt{1 + 4a^2 t^2})\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{t}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a^2 t^2}), at^2 + \frac{1}{4a} \cdot (1 - \sqrt{1 + 4a^2 t^2})\right)$$

(4)

まず、 $\frac{q}{t}$ について、

$$\frac{q}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a^2 t^2}) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a^2 t^2})$$

となるので、

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{q}{t} = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

である。次に、 $\frac{r}{t^2}$ について、

$$\begin{aligned}\frac{r}{t^2} &= \frac{1}{t^2} \cdot \left\{ at^2 + \frac{1}{4a} \cdot (1 - \sqrt{1 + 4a^2 t^2}) \right\} \\ &= a + \frac{1}{4a} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 + 4a^2 t^2}}{t^2} \\ &= a + \frac{1}{4a} \cdot \frac{1 - (1 + 4a^2 t^2)}{t^2(1 + \sqrt{1 + 4a^2 t^2})} \\ &= a - \frac{a}{1 + \sqrt{1 + 4a^2 t^2}}\end{aligned}$$

となるので、

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{r}{t^2} = a - \frac{a}{1 + 1} = \frac{a}{2}$$

である。最後に、 $\frac{r}{q^2}$ について、

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{r}{q^2} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\left(\frac{r}{t^2}\right)}{\left(\frac{q}{t}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{q}{t} = 1, \lim_{t \rightarrow +0} \frac{r}{t^2} = \frac{a}{2}, \lim_{t \rightarrow +0} \frac{r}{q^2} = \frac{a}{2}$$

3

(1)

$$f_n(x) = \frac{\log x}{x^n} \quad (x > 0)$$

を微分すると,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^n - \log x \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= \frac{1 - n \log x}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{1}{n} \\ \therefore x &= e^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

のとき, $f_n'(x) = 0$ となる。したがって, 増減表は次のようになる。

x	0	...	$e^{\frac{1}{n}}$	...
$f_n'(x)$	$\nearrow$	+	0	-
$f_n(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって, $x = e^{\frac{1}{n}}$ のとき極大となる。このとき,

$$f_n\left(e^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{ne}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{ne} \quad (x = e^{\frac{1}{n}} \text{ のとき})$$

(2)

$$g_n(t) = T_n(t) - S_n(t)$$

とする。ここで,

$$\begin{aligned} T_n(t) &= (t-1)f_n(t) \\ S_n(t) &= \int_1^t f_n(x) dx \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} g_n'(t) &= T_n'(t) - S_n'(t) \\ &= \left\{ f_n(t) + (t-1)f_n'(t) \right\} - f_n(t) \\ &= (t-1)f_n'(t) \\ &= \frac{(t-1)(1-n \log t)}{t^{n+1}} \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} g_n'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= e^{\frac{1}{n}} \quad (\because t > 1) \end{aligned}$$

であり, 増減表は次のようになる。

t	1	...	$e^{\frac{1}{n}}$	...
$g_n'(t)$	$\nearrow$	+	0	-
$g_n(t)$	$\nearrow$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって, $t = e^{\frac{1}{n}}$ のとき最大となる。

$$\text{(答)} \quad t = e^{\frac{1}{n}}$$

(3)

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_1^t f_1(x) dx \\ &= \int_1^t \frac{\log x}{x} dx \\ &= \int_1^t (\log x)(\log x)' dx \\ &= \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_1^t \\ &= \frac{1}{2} (\log t)^2 \end{aligned}$$

となる。また, $n \geq 2$ において,

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \int_1^t \frac{\log x}{x^n} dx \\ &= \left[-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\log x}{x^{n-1}} \right]_1^t - \int_1^t \left(-\frac{1}{n-1} \right) \cdot \frac{1}{x^{n-1}} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n-1)^2 t^{n-1}} - \frac{\log t}{(n-1)t^{n-1}} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \begin{cases} S_1(t) = \frac{1}{2} (\log t)^2 \\ S_n(t) = \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n-1)^2 t^{n-1}} - \frac{\log t}{(n-1)t^{n-1}} \end{cases}$$

(4)

「 $T_n(t) = S_n(t)$ となる t ($t > 1$) がただ 1 つある」

とは,

「 $g_n(t) = 0$ となる t ($t > 1$) がただ 1 つある」

と同値である。よって, $g_n(t)$ について考える。 $n \geq 2$ において,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1+0} g_n(t) &= \lim_{t \rightarrow 1+0} \{ T_n(t) - S_n(t) \} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1+0} \left\{ (t-1) \frac{\log t}{t^n} - \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2 t^{n-1}} + \frac{\log t}{(n-1)t^{n-1}} \right\} \\ &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} g_n(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \{ T_n(t) - S_n(t) \} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ (t-1) \frac{\log t}{t^n} - \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2 t^{n-1}} + \frac{\log t}{(n-1)t^{n-1}} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{t} \right) \cdot \frac{1}{t^{n-2}} \cdot \frac{\log t}{t} - \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2 t^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)t^{n-2}} \cdot \frac{\log t}{t} \right\} \\ &= -\frac{1}{(n-1)^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

となる。この結果と(2)の増減表より, $t > e^{\frac{1}{n}}$ で $g_n(t) = 0$ となる t がただ 1 つ存在することがわかり, 題意が示せた。

(証明終)