

〔解答〕

(1)

ア 6 イ 3 ウ 5 エ 6 オ 3 カ 5

(2)

キ 1 ク 2 ケ 1

(3)

コ 2 サ 4 シ 2 ス 4 セ 1 ソ 2 タ 1 チ 2
 ツ 2 テ 4 ト 2 ナ 4 ニ 1 ヌ 2 ネ 1 ノ 2

〔解説〕

(1)

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}{7-5} = 6-\sqrt{35},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{7-5} = 6+\sqrt{35}$$

となる。

(2)

求める2次方程式は,

$$\left(x - \frac{b}{a}\right)\left(x - \frac{a}{b}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)x + \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 0$$

$$\therefore x^2 - 12x + 1 = 0$$

となる。

(3)

$$A^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & b \\ -\frac{1}{a} & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} & \sqrt{7}-\sqrt{5} \\ -\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} & \sqrt{7}+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{24} + \frac{\sqrt{5}}{24} & \frac{\sqrt{7}}{12} - \frac{\sqrt{5}}{12} \\ -\frac{\sqrt{7}}{24} + \frac{\sqrt{5}}{24} & \frac{\sqrt{7}}{12} + \frac{\sqrt{5}}{12} \end{pmatrix}$$

である。

〔解答〕

(1)

ア 3 イ 5 ウ 2

(2)

エ 7 オ 4

(3)

カ 2 キ 2 ク 3

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= h\left(g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
 &= \log\left(\frac{9}{4}\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\
 &= \log\frac{9\sqrt{3}}{8} \\
 &= \log\frac{3^{\frac{5}{2}}}{2^3} \\
 &= -3\log 2 + \frac{5}{2}\log 3
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}
 (\sin\theta_1 + \cos\theta_1)^2 &= \sin^2\theta_1 + 2\sin\theta_1\cos\theta_1 + \cos^2\theta_1 \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{82}}{8}\right)^2 &= 1 + \sin 2\theta_1 \\
 \therefore \sin 2\theta_1 &= \frac{9}{32}
 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
 f(\theta_1) &= h(g(\theta_1)) \\
 &= \log\left(\frac{9}{4}\sin 2\theta_1\right) \\
 &= \log\frac{3^4}{2^7} \\
 &= -7\log 2 + 4\log 3
 \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= h(g(\theta)) \\
 &= \log\left(\frac{9}{4}\sin 2\theta\right) \\
 &= \log\frac{9}{4} + \log(\sin 2\theta)
 \end{aligned}$$

より,

$$f'(\theta) = 2\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

となる。したがって,

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2, f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3}$$

となる。

【解答】

(1)

ア 4 イ 1 ウ 5 エ 5 オ 2 カ 9

(2)

キ 4 ク 7

【解説】

(1)

$$\cos \theta = \frac{\overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OB}}}{|\overline{\text{OA}}| |\overline{\text{OB}}|} = \frac{8}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}} = \frac{4}{15} \sqrt{5}$$

となる。また、 $\triangle \text{OAB}$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\overline{\text{OA}}|^2 \cdot |\overline{\text{OB}}|^2 - (\overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OB}})^2} = \sqrt{29}$$

となる。

(2)

点 C が、線分 AB を $t:1-t$ ($0 < t < 1$) に内分する点であるとする、

$$\overline{\text{OC}} = (1-t) \overline{\text{OA}} + t \overline{\text{OB}}$$

となる。 $\overline{\text{OC}}$ と $\overline{\text{AB}}$ は直交するので、

$$\overline{\text{OC}} \cdot \overline{\text{AB}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{(1-t)\overline{\text{OA}} + t\overline{\text{OB}}\} \cdot (\overline{\text{OB}} - \overline{\text{OA}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow t|\overline{\text{OB}}|^2 - (1-t)|\overline{\text{OA}}|^2 + (1-2t)\overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OB}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 11t - 4 = 0$$

$$\therefore t = \frac{4}{11}$$

となる。よって、点 C は、線分 AB を $\frac{4}{11} : \frac{7}{11} = 4:7$ に内分する点である。

(1)

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$$

より、直線 ℓ_1 の方程式は、

$$y - \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot 2^3 + \frac{9}{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2^2 \right) (x - 2)$$

$$\therefore y = 2\sqrt{2}x + \frac{9}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = 2\sqrt{2}x + \frac{9}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

(2)

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{6}x^3 + \frac{9}{2} \\ y = 2\sqrt{2}x + \frac{9}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

より、

$$\frac{\sqrt{2}}{6}x^3 + \frac{9}{2} = 2\sqrt{2}x + \frac{9}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 12x + 16 = 0$$

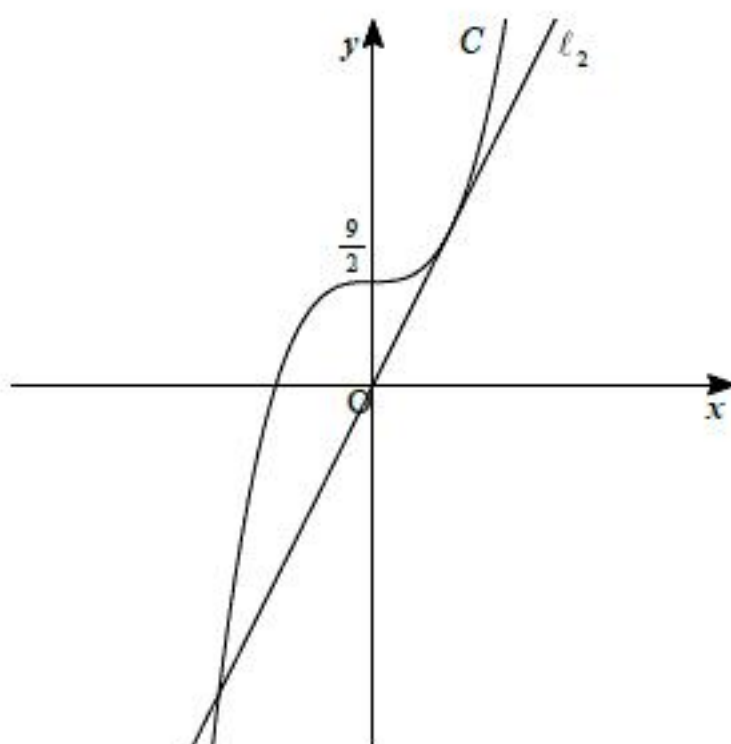
$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x+4) = 0$$

$$\therefore x = 2, -4$$

となるので、求める x 座標は、 $x = -4$ である。

$$(\text{答}) \quad x = -4$$

(3)



曲線 C と直線 ℓ_2 が共有点をちょうど 2 個もつとき、直線 ℓ_2 は曲線 C の接線となる。曲線 C 上

の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は、(1)より、

$$y - \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot t^3 + \frac{9}{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t^2 \right) (x - t)$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2x + \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}t^3$$

であるので、これが直線 ℓ_2 と一致すればよい。よって、

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 = m \\ \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}t^3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore t = \frac{3}{\sqrt{2}}, m = \frac{9}{4}\sqrt{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad m = \frac{9}{4}\sqrt{2}$$

(1)

$$f(0) = \int_{-1}^0 \frac{-t}{t^2+1} dt$$

である。ここで、

$$t^2+1=u$$

とおくと、

$$2t dt = du,$$

t	-1	→	0
u	2	→	1

より、

$$\begin{aligned} f(0) &= -\frac{1}{2} \int_2^1 \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} [\log|u|]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2} \log$

(2)

$$f(x) = x \int_{-1}^x \frac{1}{t^2+1} dt - \int_{-1}^x \frac{t}{t^2+1} dt$$

より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_{-1}^x \frac{1}{t^2+1} dt + x \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} \\ &= \int_{-1}^x \frac{1}{t^2+1} dt \end{aligned}$$

となる。よって、

$$f'(0) = \int_{-1}^0 \frac{1}{t^2+1} dt$$

であり、ここで、

$$t = \tan \theta$$

とおくと、

$$dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta,$$

t	-1	→	0
θ	$-\frac{\pi}{4}$	→	0

となるので、

$$\begin{aligned} f'(0) &= \int_{-1}^0 \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{4}$

(3)

まず、 $f(-1)=0$ となることから、点 A を通る。また、(1)より、 $f(0)>0$ となるから、 y 切片は正である。これら 2 つの条件を満たすのは、

$$(う), (か), (き), (<) \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、(2)より、 $f'(0)>0$ である。①のうち、これを満たすのは、

$$(う), (き), (<) \quad \dots \textcircled{2}$$

である。さらに、 $f'(x)$ の被積分関数は常に正の値をとるから、

$$x > -1 \text{ のとき, } f'(x) > 0$$

$$x < -1 \text{ のとき, } f'(x) < 0$$

となる。②のうち、これを満たすのは

$$(き), (<) \quad \dots \textcircled{3}$$

である。ここで、 $\theta(x)$ を

$$\tan \theta(x) = x, -\frac{\pi}{2} < \theta(x) < \frac{\pi}{2}$$

を満たす実数であるとする、(2)と同様の計算をすることにより、

$$f'(x) = \theta(x) + \frac{\pi}{4}$$

となる。したがって、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \frac{3}{4} \pi > f'(0) \quad \left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x) = \frac{\pi}{2} \right)$$

となる。③のうち、これを満たすのは、(き) である。

(答) (き)