

ア 1	イ 3	ウ 8	エ 4
オ 1	カ 9	キ 9	ク 6
ケ 2	コ 1	サ 1	シ 2
ス 8	セ 5	ソ 1	タ 6

【解説】

(1)

$(x, y) = (0, 6)$ となるのは、サイコロの目の数が6であり、6回とも裏が出る時である。よって、この時の確率は、

$$\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{384}$$

となる。

(答) $\frac{1}{384}$

(2)

$x = y$ となるのは、サイコロで偶数の目が出て、表と裏が同じ回数ずつ出る時である。よって、この時の確率は、

$$\frac{1}{6} \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{6} \times {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{19}{96}$$

となる。

(答) $\frac{19}{96}$

(3)

$y = 0$ となるのは、サイコロの目はなんでもよいが、全て表となる時である。よって、この時の確率は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{21}{128} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{21}{128}$

(4)

$x = 1$ となるのは、サイコロの目はなんでもよいが、1回だけ表が出て、残りは全て裏となる時である。よって、この時の確率は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=1}^6 {}_kC_1 \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1}{6} \cdot \frac{60}{32} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{5}{16}$

(1)

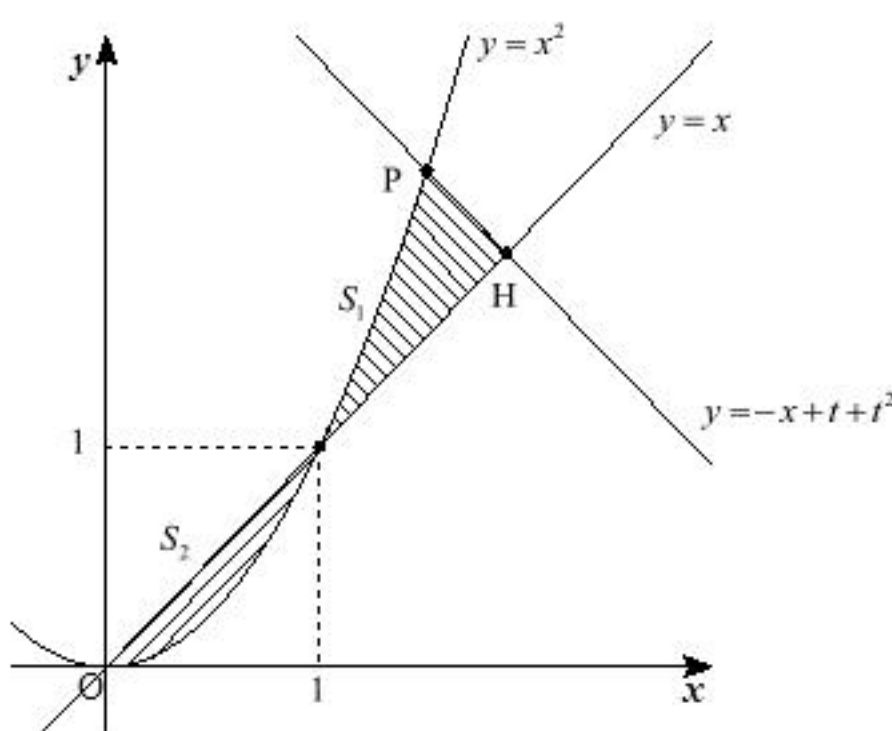
直線 PH は、直線 $y=x$ に垂直に交わるので、その傾きは -1 である。これと、点 $P(t, t^2)$ を通ることから、直線 PH は、 $y=-x+t+t^2$ となる。点 H は直線 PH と直線 $y=x$ との交点であるので、その x 座標は、

$$\begin{aligned} x &= -x + t + t^2 \\ \therefore x &= \frac{t(t+1)}{2} \end{aligned}$$

となる。点 H は、直線 $y=x$ 上にあるので、 y 座標も $\frac{t(t+1)}{2}$ となる。

$$(\text{答}) \text{H} \left(\frac{t(t+1)}{2}, \frac{t(t+1)}{2} \right)$$

(2)



S_1 は前図で、点 $(1, 1)$ と点 P、点 H とで囲まれる斜線部分である。ここで S_1 を、 $1 \leq x \leq t$ の範囲と、 $t \leq x$ の範囲に分けて考える。

[1] $1 \leq x \leq t$ について

この範囲の面積は、

$$\begin{aligned} \int_1^t (x^2 - x) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^t \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。

[2] $t \leq x$ について点 $Q(t, t)$ とする。この範囲の面積は、三角形 PHQ の面積となる。PQ を底辺とすると、その

の長さは、 $t^2 - t$ であり、高さは $\frac{t(t+1)}{2} - t$ である。よって、面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (t^2 - t) \cdot \left\{ \frac{t(t+1)}{2} - t \right\} &= \frac{1}{4} t^2 (t-1)^2 \\ &= \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{2} t^3 + \frac{1}{4} t^2 \end{aligned}$$

となる。

[1] と [2] より、 S_1 は、

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{2} t^3 + \frac{1}{4} t^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{6}$$

(3)

S_2 は、(2) の図で、 $0 \leq x \leq 1$ の斜線部である。この範囲の面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x - x^2) dx &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。 $S_1 = S_2$ より、

$$\frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

となる。上の式を変形して、

$$\begin{aligned} t^2 (3t^2 - 2t - 3) &= 0 \\ \therefore t &= 0, \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

となる。 $t > 1$ なので、 $t = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$ である。

$$(\text{答}) t = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$$

(1)

 $k \leq l \leq m \leq n$ より,

$$k \cdot l \cdot m \cdot n = k + l + m + n \leq 4n$$

である。 n は自然数なので、両辺 n で割って、

$$k \cdot l \cdot m \leq 4$$

となる。 $k \leq l \leq m \leq n$ かつ、 k, l, m, n は自然数なので、

$$(k, l, m) = (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 2, 2)$$

が考えられる。 $k \cdot l \cdot m \cdot n = k + l + m + n$ にそれぞれ代入すると、[1] $(k, l, m) = (1, 1, 1)$ のとき

$$n = 3 + n \text{ となり, 不適。}$$

[2] $(k, l, m) = (1, 1, 2)$ のとき

$$2n = 4 + n$$

$$\therefore n = 4$$

となり、これは条件を満たす。

[3] $(k, l, m) = (1, 1, 3)$ のとき

$$3n = 5 + n$$

$$\therefore n = \frac{5}{2}$$

となり、これは自然数ではないので不適。

[4] $(k, l, m) = (1, 1, 4)$ のとき

$$4n = 6 + n$$

$$\therefore n = 2$$

となり、これは $m \leq n$ に反するので不適。[5] $(k, l, m) = (1, 2, 2)$ のとき

$$4n = 5 + n$$

$$\therefore n = \frac{5}{3}$$

となり、これは自然数ではないので不適。

以上、[1]から[5]より、条件を満たすのは、 $(k, l, m, n) = (1, 1, 2, 4)$ である。(答) $(k, l, m, n) = (1, 1, 2, 4)$

(2)

与式を変形して、

$$\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}}(4-x) < 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x - \frac{\log_2(4-x)}{\log_2 \frac{1}{2}} < \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2(4-x) < \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x(4-x) < \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow x(4-x) < 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 > 0$$

$$\therefore x < 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} < x$$

となる。また、真数条件より、

$$x > 0, (4-x) > 0$$

$$\therefore 0 < x < 4$$

である。以上より、 $0 < x < 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} < x < 4$ が求める範囲となる。(答) $0 < x < 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} < x < 4$