

1

(1)

$$\begin{aligned}f(x) &= 4e^{-2} - x^2e^{-x} \text{ とおくと} \\f'(x) &= -2xe^{-x} + x^2e^{-x} \\&= x(x-2)e^{-x}\end{aligned}$$

となる。よって、 $x > 2$ において

$$f'(x) > 0$$

となるから $f(x)$ は単調増加関数であり、 $x \geq 2$ において

$$\begin{aligned}f(x) &\geq f(2) \\&\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \\&\Leftrightarrow 4e^{-2} - x^2e^{-x} \geq 0 \\&\Leftrightarrow x^2e^{-x} \leq 4e^{-2} \qquad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となることが示された。

(証明終)

さらに、 $x \geq 2$ において①より

$$0 < xe^{-x} \leq \frac{4e^{-2}}{x}$$

が成り立ち

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{-2}}{x} = 0$$

であることから、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$$

となる。

(答) $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$

(2)

$$\begin{aligned}g(x) &= xe^{-x} \text{ とおくと} \\g'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\&= (1-x)e^{-x} \\g''(x) &= -e^{-x} - (1-x)e^{-x} \\&= (x-2)e^{-x}\end{aligned}$$

となる。また、(1)の結果より

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} \\&= 0\end{aligned}$$

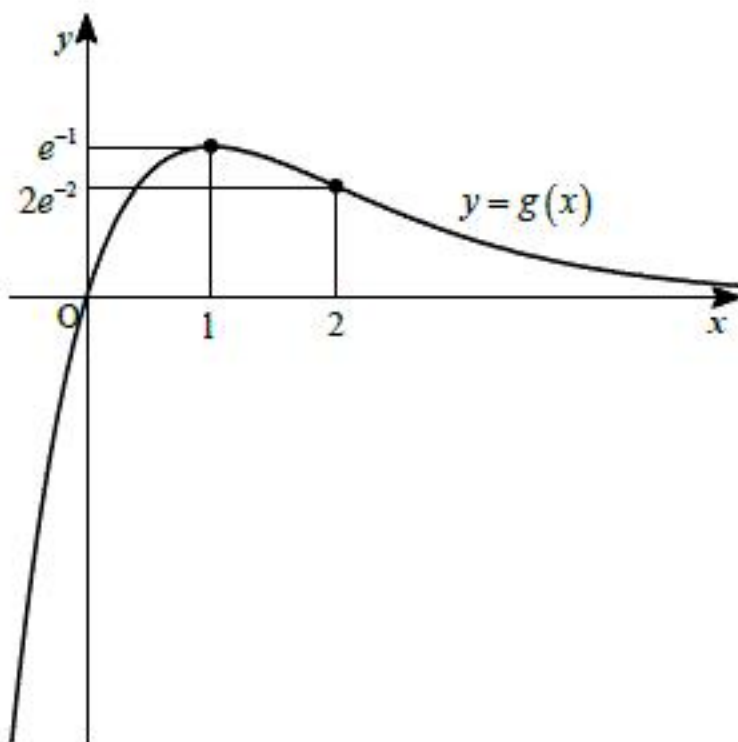
であり

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} \\&= -\infty\end{aligned}$$

であるから、関数 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
$g'(x)$	$\nearrow$	+	0	-	-	-	$\searrow$
$g''(x)$	$\nearrow$	-	-	-	0	+	$\searrow$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$2e^{-2}$	$\searrow$	0

以上より、グラフの概形は下図のようになる。



(答) 増減・凹凸：前表，グラフの概形：前図

(3)

方程式 $xe^{-x} - a = 0$ の実数解は 2 つの関数 $y = xe^{-x} (= g(x))$, $y = a$ の共有点の x 座標に対応する。よって、方程式 $xe^{-x} - a = 0$ の実数解の個数は、2 つの関数 $y = g(x)$, $y = a$ の共有点の個数に一致する。 $y = a$ は x 軸に平行な直線であるから、この共有点の個数は(2)のグラフを用いて

$$\begin{aligned}0 &< a < e^{-1} \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\a &\leq 0, a = e^{-1} \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\a &> e^{-1} \text{ のとき } 0 \text{ 個}\end{aligned}$$

である。

(答) $0 < a < e^{-1}$ のとき 2 個， $a \leq 0, a = e^{-1}$ のとき 1 個， $a > e^{-1}$ のとき 0 個

2

(1)

$f(x) = \frac{x^2}{4} + px$ であるとき

$$f'(x) = \frac{1}{2}x + p$$

となるから、曲線 $C_1: y = f(x)$ 上の点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線 l_1 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) \\ \Leftrightarrow y &= \left(\frac{1}{2}\alpha + p\right)x - \frac{1}{4}\alpha^2 \end{aligned}$$

である。ここで、曲線 C_1 は下に凸の放物線であるから

$$f(x) \geq \left(\frac{1}{2}\alpha + p\right)x - \frac{1}{4}\alpha^2$$

となり、 $\alpha < 0$ であることより、曲線 C_1 と直線 l_1 および y 軸つまり直線 $x = 0$ で囲まれる図形の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\alpha}^0 \left[\left(\frac{1}{4}x^2 + px\right) - \left\{ \left(\frac{1}{2}\alpha + p\right)x - \frac{1}{4}\alpha^2 \right\} \right] dx \\ &= \int_{\alpha}^0 \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\alpha x + \frac{1}{4}\alpha^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 x \right]_{\alpha}^0 \\ &= -\frac{1}{12}\alpha^3 \end{aligned}$$

となる。 $g(x) = x^2 - qx$ であるとき

$$g'(x) = 2x - q$$

となるから、曲線 $C_2: y = g(x)$ 上の点 $(\beta, g(\beta))$ における接線 l_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= g'(\beta)(x - \beta) + g(\beta) \\ \Leftrightarrow y &= (2\beta - q)x - \beta^2 \end{aligned}$$

である。ここで、曲線 C_2 は下に凸の放物線であるから

$$g(x) \geq (2\beta - q)x - \beta^2$$

となり、 $\beta > 0$ であることより、曲線 C_2 と直線 l_2 および y 軸つまり直線 $x = 0$ で囲まれる図形の面積 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{\beta} \left[(x^2 - qx) - \{(2\beta - q)x - \beta^2\} \right] dx \\ &= \int_0^{\beta} (x^2 - 2\beta x + \beta^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \beta x^2 + \beta^2 x \right]_0^{\beta} \\ &= \frac{1}{3}\beta^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = -\frac{1}{12}\alpha^3, S_2 = \frac{1}{3}\beta^3$$

(2)(a)

原点 $(0, 0)$ において、曲線 C_1 の接線と曲線 C_2 の接線が直交するとき

$$f'(0) \cdot g'(0) = -1$$

$$\Leftrightarrow p \cdot (-q) = -1$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{1}{p} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、(1)の結果より、 l_1, l_2 が一致するとき

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha + p = 2\beta - q & \dots \textcircled{2} \\ -\frac{1}{4}\alpha^2 = -\beta^2 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。③と $\alpha < 0, \beta > 0$ であることより

$$\alpha = -2\beta \quad \dots \textcircled{4}$$

となるから、④、①を②に代入して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha + p &= 2\beta - q \\ \Leftrightarrow -\beta + p &= 2\beta - \frac{1}{p} \\ \Leftrightarrow \beta &= \frac{1}{3}\left(p + \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

となる。以上より、 q, α, β を p で表すと

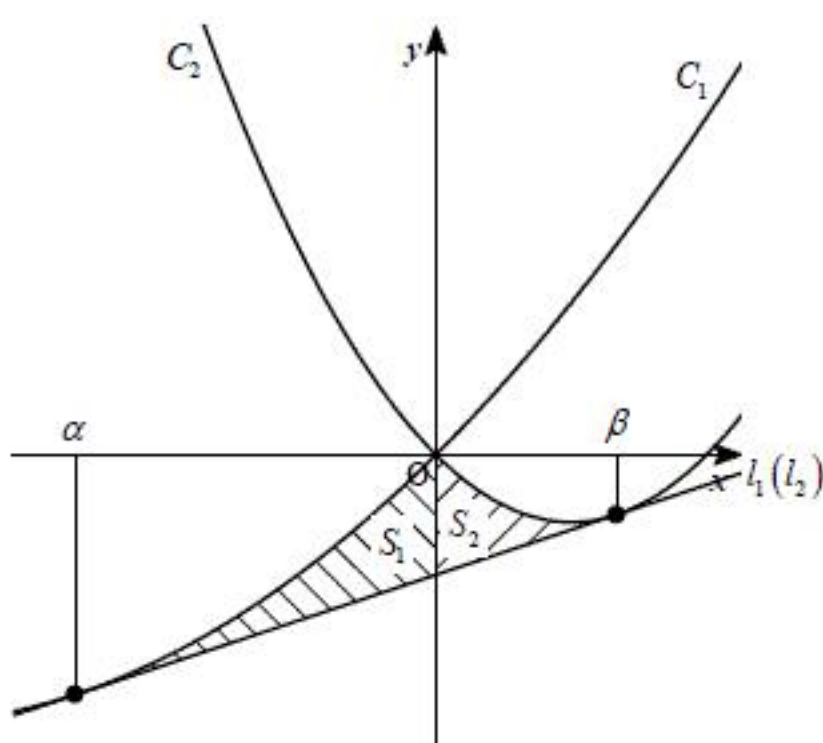
$$q = \frac{1}{p}, \alpha = -\frac{2}{3}\left(p + \frac{1}{p}\right), \beta = \frac{1}{3}\left(p + \frac{1}{p}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q = \frac{1}{p}, \alpha = -\frac{2}{3}\left(p + \frac{1}{p}\right), \beta = \frac{1}{3}\left(p + \frac{1}{p}\right)$$

(b)

曲線 C_1, C_2 、直線 $l_1 (l_2)$ と S_1, S_2 の表す領域は下図のようになる。



上図より、曲線 C_1, C_2 および直線 l_1 によって囲まれる図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= -\frac{1}{12}\alpha^3 + \frac{1}{3}\beta^3 \\ &= -\frac{1}{12}(-2\beta)^3 + \frac{1}{3}\beta^3 \\ &= \beta^3 \\ &= \frac{1}{27}\left(p + \frac{1}{p}\right)^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{27}\left(p + \frac{1}{p}\right)^3$$

(c)

$p > 0$ のとき、 $p > 0, \frac{1}{p} > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の大小関係より

$$p + \frac{1}{p} \geq 2\sqrt{p \cdot \frac{1}{p}} = 2$$

となり、等号は

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{p} \\ \Leftrightarrow p &= 1 (\because p > 0) \end{aligned}$$

のとき成り立つ。 $p + \frac{1}{p} > 0$ であることから、 $p + \frac{1}{p}$ が最小値をとるとき S も最小値をとり、

その値は

$$\frac{1}{27} \cdot 2^3 = \frac{8}{27}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{8}{27}$$

(1)

コインを投げるとき、表と裏の出方は同様に確からしいとする。ゲーム開始時、A、Bの持ち点は等しく0点であるから、1回コインを投げた結果、A、Bのいずれか一方だけが持ち点を1増やす。よって、このとき両者の持ち点が等しくなることはないから、持ち点が等しくなる確率 P_1 は

$$P_1 = 0$$

である。次に、1回コインを投げた結果、A、Bの持ち点は異なるから、もう1回コインを投げて両者の持ち点が等しくなるのは表が出たときであり、このようになる確率 P_2 は

$$P_2 = \frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_1 = 0, P_2 = \frac{1}{2}$$

(2)

帰納的に考えて、このゲームにおけるA、Bの持ち点の差は0, 1のいずれかであるから、 n 回コインを投げた結果、A、Bの持ち点が等しくなっている確率を P_n とすると、A、Bの持ち点の差が1となる確率は $1 - P_n$ である。 $n+1$ 回コインを投げた結果、A、Bの持ち点が等しくなるのは、 n 回コインを投げた結果、A、Bの持ち点が異なり、その後表が出るときであるから、これらの確率を考えて

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - P_n)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - P_n)$$

(3)

(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{1}{2}(1 - P_n) \\ \Leftrightarrow P_{n+1} - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{2}\left(P_n - \frac{1}{3}\right) \\ \Leftrightarrow P_n - \frac{1}{3} &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(P_1 - \frac{1}{3}\right) \\ \Leftrightarrow P_n &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(P_1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となり、(1)の結果より $P_1 = 0$ であるから

$$\begin{aligned} P_n &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(0 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$$