

A 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 6 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 **1** の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の 内のアからモにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートの解答欄の指定された行にマークせよ。ただし、 は 2 桁の数を表す。値が根号を含む場合は、根号の中にあられる自然数が最小になる形で表すものとする。また、分数は既約分数として表すものとする。 (30 点)

(1) 1 から 9 までの番号が書かれた 9 個のボールが袋に入っている。この袋の中から 1 個のボールを取り出し、その番号を確認してからもとに戻す試行を考える。

(a) この試行を 3 回行ったとき、同じ番号のボールを少なくとも 2 回取り出す確

率は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。

$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$

(b) この試行を 2 回行ったとき、取り出したボールの番号の差が 1 以下となる確

率は $\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ である。

$\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$

右のページは白紙です。

- (2) t を $t > 1$ をみたす実数とし、 xy 平面上で次の方程式で表される 3 直線 l_1, l_2, l_3 を考える：

$$l_1 : tx - y = 0$$

$$l_2 : x - ty - t^2 = 0$$

$$l_3 : x + ty - t^2 = 0$$

l_1, l_2, l_3 で囲まれる三角形の面積を $S(t)$ とし、この三角形の x 軸の上側の部分の面積を $S_1(t)$ 、 x 軸の下側の部分の面積を $S_2(t)$ とする。

- (a) $S_2(t) = 2S_1(t)$ となる t の値は $t = \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

- (b) $S(t) = \frac{t^{\boxed{\text{コ}}}}{t^{\boxed{\text{カ}}} - \boxed{\text{シ}}}$ であり、 $S(t)$ を t で微分して符号を調べることによ

り、 $S(t)$ は $t = \left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \right)^{\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}}$ で最小値をとることがわかり、最小値は

$$\frac{7}{\boxed{\text{チ}}} \left(\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \right)^{\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}}$$

となる。

右のページは白紙です。

- (3) p を実数とし、方程式 $x^3 - px^2 - \frac{13}{4}x + \frac{15}{8} = 0$ は 3 つの実数解 a, b, c ($a > b > c$) をもつとする。 $a + c = 2b$ をみたすとき、

$$a = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}, \quad b = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}, \quad c = -\frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}, \quad p = \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

右のページは白紙です。

(4) O を原点とする空間内に 3 点 A, B, C がある。

$$|\overrightarrow{OA}| = 2, \quad |\overrightarrow{OB}| = 1, \quad |\overrightarrow{OC}| = 3$$

であり, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ のどの 2 つのなす角も $\frac{\pi}{3}$ であるとする。G を $\triangle ABC$ の重心とし, M を AB の中点, N を BC の中点, L を MN の中点とする。このとき,

$$|\overrightarrow{OG}| = \frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}, \quad |\overrightarrow{GL}| = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}} \boxed{\text{ム}}}}{\boxed{\text{メ}} \boxed{\text{モ}}}$$

である。

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 自然数 n に対して、3次曲線 $C_n: y = x(x-n)(x-n-1)$ を考え、原点 O を通る C_n の接線で、接点が原点以外のものを l_n とする。また、 C_n の原点における接線と C_n で囲まれる部分の面積を S_n とし、 l_n と C_n で囲まれる部分の面積を T_n とする。
次の問いに答えよ。 (35 点)

- (1) l_n の方程式を求めよ。
- (2) S_n, T_n を求め、さらに、 $\frac{T_n}{S_n}$ を求めよ。
- (3) l_1 と平行な C_1 の接線で、 l_1 と異なるものを l' とする。 l' の方程式を求めよ。
- (4) l' は (3) におけるとおりとする。次の4直線で囲まれる部分を x 軸のまわりに1回転して得られる回転体の体積を求めよ。
 - l_1
 - l'
 - l_1 が C_1 と接する点を通り、 y 軸に平行な直線
 - l' が C_1 と接する点を通り、 y 軸に平行な直線

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

3 $\{\theta_k\}$ を初項 0, 公差 $\frac{\pi}{4}$ の等差数列, $\{r_k\}$ を初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列とし, 自然数 k に対して, 行列 A_k, B_k を

$$A_k = \begin{pmatrix} r_k \cos \theta_k & r_k \sin \theta_k \\ r_k \sin \theta_k & -r_k \cos \theta_k \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} r_k \cos \theta_k & -r_k \sin \theta_k \\ -r_k \sin \theta_k & -r_k \cos \theta_k \end{pmatrix}$$

とおく。 $C_k = A_k A_{k+1}, D_k = B_k B_{k+1}$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(35 点)

- (1) C_k を k を用いて表せ。
- (2) D_k を k を用いて表せ。
- (3) m を自然数とすると, 次の行列の和

$$\left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k \right)^2 + \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k \right)^4 + \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k \right)^6 + \cdots + \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k \right)^{2m}$$

を求めよ。

- (4) $C_k^2 D_k^2$ を求めよ。
- (5) 次の行列の和

$$C_1^2 D_1^2 + 2C_2^2 D_2^2 + 3C_3^2 D_3^2 + \cdots + nC_n^2 D_n^2$$

を $\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & w_n \end{pmatrix}$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n, \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ を求めよ。

ただし, 必要ならば, 実数 a ($a > 1$) に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ が成り立つことを用いてよい。

右のページは白紙です。