

B 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 4 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の (1) と (2) において、 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートにマークせよ。ただし、分数は既約分数（それ以上約分できない分数）の形に表すものとする。 (30 点)

(1) 実数 θ に対し、 $O(0, 0, 0)$ を原点とする座標をもつ空間において、3 点 $P(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $Q(0, \cos \theta, \sin \theta)$, $R(0, \cos 2\theta, \sin 2\theta)$ を考える。

(a) θ が $-\pi \leq \theta < \pi$ の範囲を動くとき、 PQ^2 の最大値は ア であり、最大値を与える θ の値は $-\frac{\text{イ}}{\text{ウ}}\pi$ と $\frac{\text{エ}}{\text{オ}}\pi$ である。

(b) ベクトル $\vec{OP}$, $\vec{OR}$ のなす角を α とする。 θ が $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 $\cos \alpha$ の最大値は $\frac{\text{カ}}{\text{キ}}$ であり、最大値を与える θ の値は $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}\pi$ である。 θ が $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 $\cos \alpha$ の最大値は $\sqrt{\frac{\text{コ}}{\text{サ}}}$ である。 θ が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 $\cos \alpha$ の最大値は $\frac{\text{シ}}{\text{ス}}$ であり、最大値を与える θ の値は $-\frac{\text{セ}}{\text{ス}}\pi$ である。

右のページは白紙です。

- (2) 零行列でない 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が、等式 $A^2 = 4A$ を満たしているとする。

- (a) $bc = 0$ のとき、 $a + d$ の値は $\boxed{\text{ソ}}$ または $\boxed{\text{タ}}$ である。また、 $bc \neq 0$ のとき、 $a + d = \boxed{\text{チ}}$ 、 $ad - bc = \boxed{\text{ツ}}$ となる。特に、 $b = c > 0$ とすると、

$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{(\boxed{\text{テ}} - \boxed{\text{ト}})a} \\ \sqrt{(\boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}})a} & \boxed{\text{ヌ}} - \boxed{\text{ネ}}a \end{pmatrix}$$

となる。

- (b) 自然数 n に対し、

$$\sum_{k=1}^n {}_n C_k 4^k 3^{n-k} = \boxed{\text{ノ}}^n - \boxed{\text{ハ}}^n$$

であるから、

$$(A + 3E)^n = \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} (\boxed{\text{ヘ}}^n - \boxed{\text{ホ}}^n) A + \boxed{\text{マ}}^n E$$

となる。ここで、 E は 2 次の単位行列を表す。

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 記号 $(0, \infty)$ は、正の実数全体からなる区間を表すものとする。1 より大きい実数 r と、区間 $(0, \infty)$ で連続な関数 $f(x)$ に対する、定積分

$$\int_1^{r^2} f\left(x^3 + \frac{r^6}{x^3}\right) \frac{1}{x} dx \quad \text{と} \quad \int_1^{r^3} f\left(x + \frac{r^6}{x}\right) \frac{1}{x} dx$$

について考える。

(40 点)

(1) r を 1 より大きい実数とする。

(a) 定積分 $\int_1^{r^2} \left(x^3 + \frac{r^6}{x^3}\right) \frac{1}{x} dx$ と $\int_1^{r^3} \left(x + \frac{r^6}{x}\right) \frac{1}{x} dx$ を求めよ。

(b) 定積分 $\int_1^{r^2} \left(x^3 + \frac{r^6}{x^3}\right)^2 \frac{1}{x} dx$ と $\int_1^{r^3} \left(x + \frac{r^6}{x}\right)^2 \frac{1}{x} dx$ を求めよ。

(2)

(a) 1 より大きいすべての実数 r と区間 $(0, \infty)$ で連続なすべての関数 $f(x)$ に対して等式 $\int_1^{r^2} f\left(x^3 + \frac{r^6}{x^3}\right) \frac{1}{x} dx = a \int_1^{r^6} f\left(t + \frac{r^6}{t}\right) \frac{1}{t} dt$ が成立するような、定数 a の値を求めよ。

(b) 1 より大きいすべての実数 r と区間 $(0, \infty)$ で連続なすべての関数 $f(x)$ に対して等式 $\int_1^{r^3} f\left(x + \frac{r^6}{x}\right) \frac{1}{x} dx = b \int_{r^3}^{r^6} f\left(t + \frac{r^6}{t}\right) \frac{1}{t} dt$ が成立するような、定数 b の値を求めよ。

(c) 1 より大きいすべての実数 r と区間 $(0, \infty)$ で連続なすべての関数 $f(x)$ に対して等式 $\int_1^{r^2} f\left(x^3 + \frac{r^6}{x^3}\right) \frac{1}{x} dx = c \int_1^{r^3} f\left(x + \frac{r^6}{x}\right) \frac{1}{x} dx$ が成立するような、定数 c の値を求めよ。

右のページは白紙です。

問題

3

の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

3

a を $a > 2$ であるような実数とする。座標平面上で、曲線 $y = \frac{1}{x}$ を C_1 とし、点 (a, a) を中心とし点 $(1, 1)$ を通る円を C_2 とする。曲線 C_1 と円 C_2 の点 $(1, 1)$ 以外の共有点のうち、 x 座標が 1 より小さいものを B とする。点 B から直線 $y = x$ に下ろした垂線と直線 $y = x$ の交点を H とする。 (30 点)

(1) 円 C_2 の方程式を求めよ。

(2) 点 H の座標を求めよ。また、点 H と点 $(1, 1)$ の距離を求めよ。

(3) t を正の実数とする。直線 $y = x$ 上にあり点 $(1, 1)$ からの距離が t である点のうち、 x 座標が 1 より大きいものを P とする。点 P を通り直線 $y = x$ に垂直な直線と曲線 C_1 の交点のうち、 x 座標が 1 より小さいものを Q とする。このとき、線分 PQ の長さを t を用いて表せ。

(4) 直線 $y = x$ と線分 BH 、および曲線 C_1 で囲まれた部分を、直線 $y = x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。