

B 2 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 3 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H B または B)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。

ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 (1) の解答は解答用マークシートにマークせよ。

問題 1 (2) の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

1

(50 点)

- (1) 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートにマークせよ。ただし、ア と イ は、それぞれ、既出の ア と イ を表す。

k を自然数とすると、不等式

$$k > \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{2}$$

が成立する。この不等式の右辺の逆数は ア $\left(\sqrt{k} - \sqrt{k - \text{イ}}\right)$ であるから、不等式

$$\frac{1}{k} < \text{ア} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k - \text{イ}}\right)$$

を得る。この不等式がすべての自然数 k に対して成立することより、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \text{ウ}$$

であることがわかる。

(2) 自然数 n に対し,

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+n+1)}, \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

と定める。

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ を求めよ。

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) s_{n+1}$ を求めよ。

(ヒント: $n \geq 2$ であるような各自然数 n に対して $s_{n+1} - s_n$ を考えることに
より, (a) の結果が使える形に変形せよ。)

(c) n を自然数とする。また, p は自然数で, 等式

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n+1} \right) = s_p$$

が成立しているとする。このとき, p を n の 1 次式の形に表せ。

(d) n を自然数とし, p は (c) における通りであるとする。また, q は自然数で,
等式

$$a_n = \frac{s_p}{q}$$

が成立しているとする。このとき, q を n の 1 次式の形に表せ。

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ を求めよ。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 a を実数とし、関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + (3a^2 - a)x$ について考える。方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数を k とする。 $f(0) = 0$ であることに注意せよ。

(50 点)

- (1) $k = 1$ となるような a の値の範囲を求めよ。
- (2) $k = 2$ となるような a の値を求めよ。
- (3) $k = 3$ となるような a の値の範囲を求めよ。
- (4) a は (3) で求めた範囲にあるとする。方程式 $f(x) = 0$ の 0 以外の実数解を α, β とおく。ただし、 $\alpha < \beta$ とする。
 - (a) $\alpha < 0$ であることを示せ。
 - (b) $\alpha < \beta < 0$ であるような a の値の範囲を求めよ。
 - (c) $\alpha < 0 < \beta$ であるような a の値の範囲を求めよ。
- (5) 関数 $f(x)$ が極大値と極小値をもつような a の値の範囲を求めよ。
- (6) a が (5) で求めた範囲にあるとき、関数 $f(x)$ の極小値を $m(a)$ とおく。 a が (5) で求めた範囲を動くときの $m(a)$ の最大値と、最大値を与える a の値を求めよ。