

F 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の (1), (2), (3) においては, 内の 1 つのカタカナに 0 から 9 までの数字が 1 つあてはまる。その数字を解答用マークシートにマークしなさい。与えられた枠数より少ない桁の数があてはまる場合は, 上位の桁を 0 とし, 右に詰めた数値としなさい。分数は既約分数とし, 値が整数の場合は分母を 1 としなさい。根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

(50 点)

(1) 1 枚の硬貨をくり返し投げるゲームを行う。このゲームを, 表がちょうど 4 回出たところ, または, 裏がちょうど 4 回出たところで終了することにする。ただし, 硬貨を投げたとき, 表が出る確率と裏が出る確率はいずれも $\frac{1}{2}$ である。

(a) 硬貨を k 回投げたところで終了する確率を p_k とすると,

$$p_4 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad p_5 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \quad p_7 = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}} \mid \boxed{\text{キ}}}$$

である。

(b) このゲームが終了するまでに硬貨を投げる回数の期待値は

$$\frac{\boxed{\text{ク}} \mid \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}} \mid \boxed{\text{サ}}}$$

である。

右のページは白紙です。

(2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の θ に対して、 x に関する 2 次方程式

$$x^2 + (\sqrt{2} \sin 2\theta)x + 2 \cos \theta = 0$$

を考える。

(a) この方程式が異なる 2 つの実数解をもつのは、

$$\boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}^\circ < \theta \leq \boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}} \boxed{\text{オ}}^\circ$$

のときである。

以下、この方程式が異なる 2 つの実数解をもつ場合について考え、この 2 つの実数解を α 、 β とする。

(b) 無限等比級数

$$1 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^n + \cdots$$

が収束するのは、

$$\boxed{\text{カ}} \boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}}^\circ < \theta \leq \boxed{\text{ケ}} \boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}}^\circ$$

のときである。

(c) 無限等比級数

$$1 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^n + \cdots$$

が収束して、その和が $2 - \sqrt{2}$ となるのは、

$$\theta = \boxed{\text{シ}} \boxed{\text{ス}} \boxed{\text{セ}}^\circ$$

のときである。

右のページは白紙です。

- (3) $\triangle OAB$ において、辺 AB を $2:1$ の比に内分する点を C ($AC:CB=2:1$), 線分 OC を $1:2$ の比に内分する点を D ($OD:DC=1:2$) とする。辺 OA 上に点 P を、辺 OB 上に点 Q を、線分 PQ が点 D を通るようにとる。

(a)

$$\frac{OA}{OP} + 2 \times \frac{OB}{OQ} = \boxed{\text{ア}}$$

である。

以下、 $OA=2$, $OB=3$, $\angle AOB=60^\circ$ とする。

(b) $OP=1$ のとき、 $\triangle OPQ$ の面積は

$$\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}}} \times \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

(c) 線分 OP の長さと線分 OQ の長さの和 $OP+OQ$ がもっとも小さくなるように点 P , Q をとるとき,

$$OP = \frac{\boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}} \sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。このとき,

$$OP+OQ = \frac{\boxed{\text{コ}} + \boxed{\text{サ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は解答用紙 **2** に記入しなさい。

2 以下の問いに答えなさい。

(25 点)

(1) 関数 $f(x) = \frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x$ ($0 < x < \pi$) について考える。

(a) $x = \frac{\pi}{12}$ のとき、 $f(x)$ の値 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ を求めなさい。

(b) 関数 $f(x)$ の極値を求めなさい。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって表される座標平面上の点の移動 (1 次変換) f が条件

「点 $P(x, y)$ が直線 $y = -x + 1$ 上にあるとき、点 $P(x, y)$ の f による像 $P'(x', y')$ はつねに直線 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ 上にある。また、点 $P(x, y)$ が直線 $y = 2x - 1$ 上にあるとき、点 $P(x, y)$ の f による像 $P'(x', y')$ はつねに直線 $x = 1$ 上にある」

を満たすとき、 A を求めなさい。

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答は解答用紙 **3** に記入しなさい。

3 座標平面上において、放物線 $y = x^2$ 上に異なる 2 点 P, Q をとり、線分 PQ の中点を M とし、M の座標を (a, b) とする。

(25 点)

- (1) $a = 1, b = 3$ のとき、線分 PQ の長さ PQ を求めなさい。
- (2) $PQ = 4$ のとき、 b を a の式で表しなさい。
- (3) $PQ = 4$ を満たしながら P, Q を動かすとき、 b の最小値を求めなさい。

